



Universidade de Brasília - UnB  
Instituto de Ciências Exatas - IE  
Departamento de Estatística - EST

# **Modelos de Volatilidade com Distribuições $\alpha$ -estáveis**

Ana Vitória Rezende Ramos

Orientador: Prof. Dr. Jhames Matos Sampaio

Brasília

2018



Ana Vitória Rezende Ramos

## **Modelos de Volatilidade com Distribuições $\alpha$ -estáveis**

Relatório apresentado à disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso II de graduação em Estatística, Departamento de Estatística, Instituto de Exatas, Universidade de Brasília, como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Bacharel em Estatística.

Orientador: Prof. Dr. Jhames Matos Sampaio

Brasília

2018

Ana Vitória Rezende Ramos

Modelos de Volatilidade com Distribuições  $\alpha$ -estáveis/ Ana Vitória Rezende Ramos. – Brasília, 2018-

119 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Prof. Dr. Jhames Matos Sampaio

Relatório Final – Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Estatística

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação, 2018.

1. Distribuições  $\alpha$ -estáveis. 2. GARCH. 3. APARCH. 4. Séries temporais.

Ana Vitória Rezende Ramos

## **Modelos de Volatilidade com Distribuições $\alpha$ -estáveis**

Relatório apresentado à disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso II de graduação em Estatística, Departamento de Estatística, Instituto de Exatas, Universidade de Brasília, como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Bacharel em Estatística.

Trabalho aprovado. Brasília, 06 de julho de 2018.

---

**Prof. Dr. Jhames Matos Sampaio**  
Orientador

---

**Prof<sup>a</sup>. Dra. Cira Etheowalda Guevara  
Otiniano**  
Membro da Banca

---

**Prof. Dr. Raul Yukihiro Matsushita**  
Membro da Banca

Brasília  
2018



# Agradecimentos

Primeiramente agradeço à minha família, em especial meus pais, Carlos Henrique e Luciana, e meu irmão Luiz Henrique por todas as oportunidades que proporcionaram e por sempre me apoiarem.

Agradeço também aos meus colegas do curso de Estatística e da escola pela amizade e por todas as horas de estudo, em especial Gabriel Faria, Ana Gabriela Vasconcelos, Lucas Gongora, Ana Carolina da Cruz, Laís Ribeiro e Milena Garcez.

Por fim, agradeço a todos os professores com quem tive contato durante a graduação. Em especial, ao meu orientador Prof. Dr. Jhames Sampaio pela ajuda e aos professores Paulo Britto e André Serrano pelo apoio durante o período que trabalhamos juntos.





# Resumo

Para modelar séries temporais com heterocedasticidade dois modelos muito utilizados são os modelos GARCH (*Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*) e APARCH (*Asymmetric Power ARCH*). Já o modelo ARMA (*Autoregressive Moving Average*) pode ser utilizado para capturar a correlação entre o processo em diferentes tempos e também entre o processo e os termos de erro. Esse modelo será utilizado juntamente com os modelos GARCH e APARCH, quando necessário.

Para os termos de erro, também chamados de inovações, dos modelos citados, usualmente supõe-se distribuição Normal. Entretanto, supor tal distribuição implica que valores extremos não possuem uma probabilidade alta de serem obtidos, o que pode não ser adequado para conjuntos de dados com caudas pesadas. A fim de obter um melhor ajuste para distribuições com caudas pesadas uma opção é utilizar a distribuição  $\alpha$ -estável para as inovações.

Assim, com o objetivo de avaliar a utilização da distribuição Estável, serão apresentadas neste trabalho duas aplicações: uma contendo informações sobre a velocidade do vento em Brasília e outra referente ao Índice Bovespa.

**Palavras-chave:** Distribuição  $\alpha$ -estável, GARCH, APARCH, séries temporais.



# Abstract

In order to model time series with heteroscedasticity, two widely used models are the GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) and the APARCH (Asymmetric Power ARCH) models. The ARMA (Autoregressive Moving Average) model can be used to capture the correlation between the process at different times and also between the process and the error terms. This model will be used with the GARCH and APARCH models when needed.

For the error terms, also called innovations, of the models aforementioned, the Normal distribution is usually assumed. However, assuming this distribution means that extreme values won't have a high probability of being obtained, which may not be suitable for data sets with heavy tails. In order to get a better fit for heavy tail distributions, an option is to use the Stable distribution for the error terms.

Therefore, in order to evaluate the use of the Stable distribution, two applications will be presented in this paper, one about the wind speed in Brasília and another regarding the Bovespa Index.

**Keywords:** Stable distribution, GARCH, APARCH, time series.



# Lista de ilustrações

Figura 1.1 – Densidade $\alpha$ -estável . . . . .	26
Figura 1.2 – Distribuição $\alpha$ -estável . . . . .	33
Figura 3.1 – Velocidade do vento . . . . .	44
Figura 3.2 – Estrutura de dependência da velocidade do vento . . . . .	44
Figura 3.3 – Log-retorno da velocidade do vento . . . . .	45
Figura 3.4 – Gráficos de quantis do log-retorno da velocidade do vento . . . . .	45
Figura 3.5 – Autocorrelação do log-retorno da velocidade do vento . . . . .	46
Figura 3.6 – Autocorrelação para os resíduos do modelo GARCH(1,1) . . . . .	47
Figura 3.7 – Resíduos do modelo MA-GARCH(1, 1, 1) com inovações gaussianas . . . . .	48
Figura 3.8 – Resíduos do modelo MA-GARCH(1, 1, 1) com inovações estáveis . . . . .	49
Figura 3.9 – Resíduos do modelo MA-GARCH(1, 1, 1) . . . . .	49
Figura 3.10–Histograma dos resíduos do modelo MA-GARCH(1, 1, 1) . . . . .	50
Figura 3.11–Gráfico de quantis dos resíduos do modelo MA-GARCH(1, 1, 1) . . . . .	50
Figura 3.12–Autocorrelação para o modelo APARCH(1, 1) com inovações gaussianas . . . . .	51
Figura 3.13–Autocorrelação para o modelo APARCH(1, 1) com inovações estáveis . . . . .	52
Figura 3.14–Autocorrelação dos resíduos do modelo MA-APARCH(1, 1, 1) . . . . .	53
Figura 3.15–Resíduos do modelo MA-APARCH(1, 1, 1) . . . . .	53
Figura 3.16–Histograma dos resíduos do modelo MA-APARCH(1, 1, 1) . . . . .	54
Figura 3.17–Gráfico de quantis dos resíduos do modelo MA-APARCH(1, 1, 1) . . . . .	54
Figura 3.18–Índice Bovespa . . . . .	56
Figura 3.19–Estrutura de dependência do Índice Bovespa . . . . .	56
Figura 3.20–Log-retorno do Índice Bovespa . . . . .	57
Figura 3.21–Gráficos de quantis do log-retorno do Índice Bovespa . . . . .	57
Figura 3.22–Autocorrelação do log-retorno do Índice Bovespa . . . . .	58
Figura 3.23–Autocorrelação para os resíduos do modelo GARCH(1, 1) . . . . .	59
Figura 3.24–Resíduos do modelo GARCH(1, 1) . . . . .	60
Figura 3.25–Histograma dos resíduos do modelo GARCH(1, 1) . . . . .	60
Figura 3.26–Gráfico de quantis dos resíduos do modelo GARCH(1, 1) . . . . .	60
Figura 3.27–Histograma dos resíduos do modelo APARCH(1, 1) . . . . .	62
Figura 3.28–Gráfico de quantis dos resíduos do modelo APARCH(1, 1) . . . . .	62
Figura 3.29–Resíduos do modelo APARCH(1, 1) . . . . .	62
Figura 3.30–Autocorrelação para os resíduos do modelo APARCH(1, 1) . . . . .	63



# Lista de tabelas

Tabela 3.1 – Medidas resumo da velocidade do vento (m/s) . . . . .	43
Tabela 3.2 – Medidas resumo do log-retorno da velocidade do vento . . . . .	45
Tabela 3.3 – Estimativas para o modelo GARCH(1, 1) . . . . .	46
Tabela 3.4 – Estimativas para o modelo MA-GARCH(1, 1, 1) . . . . .	48
Tabela 3.5 – Medidas resumo das inovações dos modelos MA-GARCH(1, 1, 1) . . . .	49
Tabela 3.6 – Estimativas para o modelo APARCH(1, 1) . . . . .	51
Tabela 3.7 – Estimativas para o modelo MA-APARCH(1, 1, 1) . . . . .	52
Tabela 3.8 – Medidas resumo das inovações dos modelos MA-APARCH(1, 1, 1) . . .	53
Tabela 3.9 – Comparação entre os modelos sem a estrutura de médias móveis . . . .	55
Tabela 3.10–Comparação entre os modelos com a estrutura de médias móveis . . . .	55
Tabela 3.11–Medidas resumo para o Índice Bovespa . . . . .	55
Tabela 3.12–Medidas resumo do log-retorno do Índice Bovespa . . . . .	57
Tabela 3.13–Estimativas para o modelo GARCH(1, 1) . . . . .	58
Tabela 3.14–Medidas resumo das inovações dos modelos GARCH(1, 1) . . . . .	59
Tabela 3.15–Estimativas para o modelo APARCH(1, 1) . . . . .	61
Tabela 3.16–Medidas resumo das inovações dos modelos APARCH(1, 1) . . . . .	61
Tabela 3.17–Comparação entre os modelos ajustados . . . . .	63





# Lista de símbolos

$\alpha$	Letra grega alfa
$\beta$	Letra grega beta
$\gamma$	Letra grega gama
$\delta$	Letra grega delta
$\varepsilon$	Letra grega épsilon
$\zeta$	Letra grega zeta
$\eta$	Letra grega eta
$\theta; \Theta$	Letras gregas teta minúscula e maiúscula
$\lambda; \Lambda$	Letras gregas lambda minúscula e maiúscula
$\mu$	Letra grega mi
$\xi; \Xi$	Letras gregas csi minúscula e maiúscula
$\pi$	Letra grega pi
$\sigma$	Letra grega sigma
$\tau$	Letra grega tau
$\upsilon$	Letra grega upsilon
$\Phi$	Letra grega fi
$\psi; \Psi$	Letras gregas psi minúscula e maiúscula
$\omega$	Letra grega omega
$i$	Número imaginário: $i = \sqrt{-1}$
$P$	Probabilidade
$f$	Função densidade de probabilidade
$F$	Função de distribuição
$\Phi_X(t)$	Função característica da variável aleatória $X$

$E$	Esperança ou valor esperado
$Var$	Variância
$Cov$	Covariância
$\in$	Pertence a
$\forall$	Para todo
$\sim$	Distribuído segundo
$\Rightarrow$	Implica em
$\xrightarrow{D}$	Convergência em distribuição
$\stackrel{D}{=}$	Igualdade em distribuição
$\mathcal{F}$	Sigma álgebra
$B$	Operador de defasagens. $B^k = X_t = X_{t-k}$ .
$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	Distribuição Normal com média $\mu$ e variância $\sigma^2$
$S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$	Distribuição $\alpha$ -estável com parâmetros $\alpha$ , $\sigma$ , $\beta$ e $\mu$
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>19</b>
<b>1 Distribuições estáveis</b>	<b>21</b>
1.1 Parâmetros e propriedades . . . . .	26
1.2 Função de probabilidade acumulada . . . . .	32
<b>2 Modelos para séries temporais</b>	<b>35</b>
2.1 Modelo ARMA . . . . .	36
2.2 Modelo GARCH . . . . .	37
2.3 Modelo APARCH . . . . .	41
<b>3 Aplicações</b>	<b>43</b>
3.1 Velocidade do vento em Brasília . . . . .	43
3.2 Índice Bovespa . . . . .	55
<b>4 Conclusões</b>	<b>65</b>
<b>Referências</b>	<b>67</b>
<b>ANEXO A Códigos</b>	<b>69</b>
A.1 Gráficos apresentados no Capítulo 1 . . . . .	69
A.2 Códigos da aplicação em dados de ventos . . . . .	78
A.3 Códigos da aplicação no índice Bovespa . . . . .	100



# Introdução

Distribuições com caudas pesadas são frequentemente encontradas em áreas como economia, hidrologia e estudo de ventos. A fim de obter um melhor ajuste para dados desse tipo, uma opção seria utilizar a distribuição  $\alpha$ -estável para as inovações, no lugar da distribuição Normal, mais utilizada. Assim, este trabalho objetiva apresentar as distribuições estáveis e algumas das suas propriedades, além de avaliar a sua utilização para dados de séries temporais.

Utilizar a distribuição Normal implica que valores extremos não possuem uma probabilidade alta de serem obtidos, o que pode não ser adequado para conjuntos de dados com caudas pesadas. A fim de obter um melhor ajuste para distribuições com caudas pesadas uma opção é utilizar a distribuição  $\alpha$ -estável para as inovações. Além de capturar caudas pesadas, outra vantagem da Estável é a flexibilidade da sua densidade, devido aos quatro parâmetros dessa distribuição, possibilitando uma forma leptocúrtica. Assim, no primeiro capítulo serão apresentadas três definições equivalentes da distribuição  $\alpha$ -estável, sua função característica e suas propriedades. Também nesse capítulo, será destacada a influência e o significado de cada um de seus parâmetros.

Para modelar séries temporais com heterocedasticidade, Engle (1982) introduziu o modelo ARCH (*Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*). Posteriormente, o modelo GARCH (*Generalized ARCH*) foi introduzido por Bollerslev (1986), permitindo modelar a heterocedasticidade condicional com um número menor de parâmetros do que o modelo ARCH. Esses fazem parte de uma classe de modelos não lineares na variância. Outro desta classe é o modelo APARCH (*Asymmetric Power ARCH*) o qual foi introduzido por Ding, Granger e Engle (1993) e contém os modelos ARCH e GARCH como casos particulares. Esses modelos serão apresentados no Capítulo 2.

Também nesse capítulo será apresentado o modelo ARMA (*Autoregressive Moving Average*), ou modelo autorregressivo de médias móveis. Essa estrutura será utilizada juntamente com os modelos GARCH e APARCH quando for necessário corrigir a estrutura de correlação dos dados.

No Capítulo 3, os modelos descritos serão aplicados em dois bancos de dados abrangendo áreas distintas: o primeiro referente à velocidade do vento em Brasília e o segundo contendo informações sobre o Índice Bovespa. Para identificar se há a necessidade de ajustar a estrutura do modelo autorregressivo de médias móveis nesses dados serão utilizadas as funções de autocorrelação e de autocorrelação parcial, as quais serão visualizadas através de gráficos. Os gráficos dessas funções também serão utilizados para avaliar a hipótese de independência entre as inovações dos modelos aplicados.

O quarto capítulo apresentará a conclusão, contendo os principais resultados obtidos durante o trabalho e sugestões para estudos futuros. Por fim, os dois últimos capítulos apresentarão, respectivamente, as referências bibliográficas utilizadas para o desenvolvimento deste trabalho e os códigos utilizados para gerar os resultados descritos. Esses códigos foram gerados no *software R* e estão presentes no Anexo com o objetivo de facilitar a reprodução dos resultados obtidos.

# 1 Distribuições estáveis

A distribuição Normal (ou Gaussiana) é amplamente utilizada em diversas áreas da estatística, incluindo séries temporais. Entretanto, utilizar tal distribuição implica que valores extremos possuem probabilidade baixa ou nula de serem obtidos, o que pode não ser adequado para conjuntos de dados com caudas pesadas.

Distribuições com caudas pesadas são frequentemente encontradas em áreas como economia, hidrologia e estudo de ventos. A fim de se obter um melhor ajuste para dados deste tipo e, conseqüentemente, ser capaz de fazer previsões mais precisas, uma opção é utilizar a distribuição  $\alpha$ -estável.

Para melhor compreender a distribuição  $\alpha$ -estável será definida a seguir a distribuição Normal.

**Definição 1.1.** *Uma variável aleatória  $X$  tem distribuição Normal, ou distribuição Gaussiana, com parâmetros  $\mu \in \mathbb{R}$  e  $\sigma^2 > 0$  se sua densidade é dada por*

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Notação:**  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ .

O Teorema do Limite Central, enunciado abaixo, é fundamental para diversos resultados assintóticos utilizados na estatística. Entretanto, esse teorema é válido apenas quando as variáveis aleatórias em questão possuem variância finita.

**Teorema 1.1** (Teorema do Limite Central). *Sejam  $X_1, \dots, X_n$  variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com  $E(X_1) = \mu$  e  $Var(X_1) = \sigma^2$ , sendo  $\mu \in \mathbb{R}$  finito e  $\sigma^2 > 0$  finito, e seja  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ ,  $n \geq 1$ . Então  $\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{Var(S_n)}} \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, 1)$  ou seja,*

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, 1).$$

$$\text{Equivalentemente, } \forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

Para o caso em que a variância não é finita, Lévy (1924) introduziu as distribuições estáveis e demonstrou o teorema apresentado a seguir.

**Teorema 1.2.** *Dada uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas  $X_1, X_2, \dots, X_n$  e sequências reais  $\{c_n\}$  e  $\{d_n\}$  com  $c_n > 0$ , a condição necessária e suficiente para que  $F$  seja a distribuição limite de  $\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n - d_n}{c_n}$  é que  $F$  seja estável.*

Assim, é necessário definir o que é uma variável aleatória estável.

**Definição 1.2.** Uma variável aleatória  $Y$  é dita estável se para qualquer  $n \geq 2$  existem  $c_n > 0$  e  $d_n \in \mathbb{R}$  tais que:

$$Y_1 + \dots + Y_n \stackrel{D}{=} c_n Y + d_n \quad (1.1)$$

com  $Y_1, \dots, Y_n$ ,  $n \geq 2$ , cópias independentes de  $Y$ .

Se  $d_n = 0$  a variável é dita estritamente estável.

**Observação 1.1.** Feller (1971) substitui os termos "estável" e "estritamente estável" por "stable (in the broad sense)" e "stable (in the strict sense)", respectivamente, e Lévy (1924) por "semi-stable" e "stable".

**Exemplo 1.1.** Seja  $X$  uma variável aleatória com distribuição Normal Padrão e  $X_1, \dots, X_n$  cópias independentes de  $X$ . Sabe-se que a função característica de  $X$  é  $\Phi_X(t) = e^{-t^2/2}$ , portanto, se  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ ,

$$\begin{aligned} \Phi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) &= \Phi_{S_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \Phi_{X_1+\dots+X_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \\ &= \Phi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \Phi_{X_2}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \dots \Phi_{X_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \\ &= \left[\Phi_X\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^n = \left[e^{-\frac{t^2}{2n}}\right]^n = e^{-t^2/2} = \Phi_X(t). \end{aligned}$$

Assim  $\frac{S_n}{\sqrt{n}} \stackrel{D}{=} X$  ou  $S_n \stackrel{D}{=} \sqrt{n}X$ .

Considerando  $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  e  $R_n = Y_1 + \dots + Y_n$ , como  $Y \stackrel{D}{=} \sigma X + \mu$ , tem-se que

$$\Phi_Y(t) = \Phi_{\sigma X + \mu}(t) = e^{it\mu} \Phi_X(\sigma t) = e^{it\mu} e^{-(\sigma t)^2/2} = \exp\left\{it\mu - \frac{(\sigma t)^2}{2}\right\}.$$

Analogamente ao cálculo realizado no caso da Normal Padrão,

$$\begin{aligned} \Phi_{\frac{R_n}{\sqrt{n}}}(t) &= \left[\Phi_Y\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^n = \left[\exp\left\{\frac{t}{\sqrt{n}}i\mu - \frac{(\sigma t)^2}{2n}\right\}\right]^n \\ &= e^{it\mu\sqrt{n}} e^{-(\sigma t)^2/2} = e^{it(\mu\sqrt{n})} \Phi_X(\sigma t) \\ &= \Phi_{\sigma X + \mu\sqrt{n}}(t) = \Phi_{Y - \mu + \mu\sqrt{n}}(t), \end{aligned}$$

e portanto  $\frac{R_n}{\sqrt{n}} \stackrel{D}{=} Y - \mu + \mu\sqrt{n}$  ou  $R_n \stackrel{D}{=} \sqrt{n}Y - \sqrt{n}\mu + \mu n = \sqrt{n}Y + (\mu n - \mu\sqrt{n})$ .

A partir da Definição 1.2 é possível notar que, uma variável aleatória  $Y$  que assume apenas um valor será sempre estritamente estável. Nesse caso, diz-se que  $Y$  apresenta distribuição estável degenerada.



**Exemplo 1.2.** Seja  $Z$  uma variável aleatória degenerada, isto é,  $P(Z = z) = 1$  para alguma constante  $z$  e  $Z_1, \dots, Z_n$  cópias independentes de  $Z$ . Se  $S_n = Z_1 + \dots + Z_n$ , então as funções características de  $Z$  e de  $S_n$  são dadas por

$$\Phi_Z(t) = E(e^{itZ}) = e^{itz}$$

e

$$\begin{aligned}\Phi_{S_n}(t) &= \Phi_{Z_1+\dots+Z_n}(t) = \Phi_{Z_1}(t) \Phi_{Z_2}(t) \dots \Phi_{Z_n}(t) \\ &= [\Phi_Z(t)]^n = (e^{itz})^n = e^{itnz} \\ &= \Phi_Z(nt) = \Phi_{nZ}(t).\end{aligned}$$

Portanto  $S_n \stackrel{D}{=} nZ$ .

**Definição 1.3.** Uma variável aleatória  $X$  tem distribuição simétrica (em torno do zero) se  $X \stackrel{D}{=} -X$ , ou seja, se  $P(X \leq x) = P(X \geq -x) = P(-X \leq x)$ . Analogamente,  $X$  é simétrica em torno de uma constante  $c$  se  $P(X \leq x + c) = P(-X \leq x - c)$ .

A partir das definições 1.2 e 1.3 é perceptível que, se  $Y$  é uma variável aleatória estável simétrica, então  $Y$  é estritamente estável.

As constantes  $c_n$  e  $d_n$  apresentadas na Definição 1.2 serão caracterizadas nos teoremas a seguir.

**Teorema 1.3.** A constante  $c_n$  na equação (1.1) é da forma  $c_n = n^{1/\alpha}$  com  $0 < \alpha \leq 2$ .

*Demonstração.* Feller (1971) e Sampaio (2012) apresentam a demonstração para esse teorema. □

**Teorema 1.4.** Se  $X$  é uma variável aleatória com distribuição estável com  $\alpha \neq 1$  existe  $b \in \mathbb{R}$  tal que  $d_n = -b(n^{1/\alpha} - n)$  e  $(X - b)$  tem distribuição estritamente estável.

*Demonstração.* Seja  $Y$  uma variável aleatória estável,  $Y_1, Y_2, Y_3, \dots$  cópias independentes de  $Y$  e  $S_m = Y_1 + \dots + Y_m$ . Assim,

$$\begin{aligned}S_{kn} &= Y_1 + \dots + Y_n + Y_{n+1} + \dots + Y_{2n} + \dots + Y_{(k-1)n+1} + \dots + Y_{kn} \\ &= S_n + (S_{2n} - S_n) + (S_{3n} - S_{2n}) + \dots + (S_{kn} - S_{(k-1)n})\end{aligned}$$

Pela Definição 1.2

$$\left\{ \begin{array}{l} S_n = Y_1 + \dots + Y_n \stackrel{D}{=} c_n Y + d_n \stackrel{D}{=} c_n Y_1 + d_n \\ S_{2n} - S_n = Y_{n+1} + \dots + Y_{2n} \stackrel{D}{=} Y_1 + \dots + Y_n \stackrel{D}{=} c_n Y + d_n \stackrel{D}{=} c_n Y_2 + d_n \\ S_{3n} - S_{2n} = Y_{2n+1} + \dots + Y_{3n} \stackrel{D}{=} Y_1 + \dots + Y_n \stackrel{D}{=} c_n Y + d_n \stackrel{D}{=} c_n Y_3 + d_n \\ \vdots \\ S_{kn} - S_{(k-1)n} = Y_{(k-1)n+1} + \dots + Y_{kn} \stackrel{D}{=} Y_1 + \dots + Y_n \stackrel{D}{=} c_n Y + d_n \stackrel{D}{=} c_n Y_k + d_n \end{array} \right.$$

e portanto

$$\begin{aligned}
S_{kn} &\stackrel{D}{=} c_n Y_1 + d_n + c_n Y_2 + d_n + \dots + c_n Y_k + d_n \\
&= c_n (Y_1 + Y_2 + \dots + Y_k) + k d_n \\
&\stackrel{D}{=} c_n (c_k Y + d_k) + k d_n \\
&= c_n c_k Y + c_n d_k + k d_n.
\end{aligned}$$

Analogamente, é possível obter  $S_{kn} \stackrel{D}{=} c_k c_n Y + c_k d_n + n d_k$ . Assim,

$$\begin{aligned}
c_n c_k Y + c_n d_k + k d_n &\stackrel{D}{=} c_k c_n Y + c_k d_n + n d_k \\
\Rightarrow c_n d_k + k d_n &= c_k d_n + n d_k \\
\Rightarrow (k - c_k) d_n &= (n - c_n) d_k
\end{aligned}$$

Pelo Teorema 1.3  $c_n$  é da forma  $c_n = n^{1/\alpha}$  com  $0 < \alpha \leq 2$ . Então

$$(k - k^{1/\alpha}) d_n = (n - n^{1/\alpha}) d_k$$

e, se  $\alpha \neq 1$ ,  $d_n = -b(n^{1/\alpha} - n)$  com  $b = \frac{d_k}{(k - k^{1/\alpha})} \in \mathbb{R}$ .

Sabe-se que  $c_n = n^{1/\alpha}$  e  $d_n = -b(n^{1/\alpha} - n)$  para  $0 < \alpha \leq 2$  e  $\alpha \neq 1$  e  $b \in \mathbb{R}$ . Portanto, se  $Y$  é estável, pela Definição 1.2,  $c_n Y + d_n \stackrel{D}{=} Y_1 + \dots + Y_n$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow n^{1/\alpha} Y - b(n^{1/\alpha} - n) &\stackrel{D}{=} Y_1 + \dots + Y_n \stackrel{D}{=} Y_1 + \dots + Y_n + (-nb + nb) \\
\Rightarrow n^{1/\alpha} Y - b n^{1/\alpha} + nb &\stackrel{D}{=} Y_1 - b + \dots + Y_n - b + nb \\
\Rightarrow n^{1/\alpha} (Y - b) &\stackrel{D}{=} (Y_1 - b) + \dots + (Y_n - b) \\
\Rightarrow c_n (Y - b) &\stackrel{D}{=} (Y_1 - b) + \dots + (Y_n - b),
\end{aligned}$$

ou seja,  $Y - b$  é estritamente estável.

□

**Exemplo 1.3.** A partir dos resultados obtidos nos Exemplos 1.1 e 1.2 tem-se que, se  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ ,  $c_n = n^{1/2}$  e  $d_n = -\mu(\sqrt{n} - n)$ , ou seja,  $\alpha = 2$  e  $b = \mu$ , e, se  $Z$  é uma variável degenerada, então  $c_n = n$  e  $d_n = 0$ , ou seja,  $\alpha = 1$ .

A seguir serão apresentadas definições de variáveis aleatórias estáveis equivalentes à Definição 1.2. A equivalência entre essas definições está demonstrada em Samorodnitsky e Taqqu (1994).

**Definição 1.4.** Uma variável aleatória  $Y$  é dita estável se, para quaisquer  $a$  e  $b$  positivos, existem  $c$  positivo e  $d \in \mathbb{R}$  tais que:

$$aY_1 + bY_2 \stackrel{D}{=} cY + d \tag{1.2}$$

com  $Y_1$  e  $Y_2$  cópias independentes de  $Y$ .

Analogamente à Definição 1.2, se  $d = 0$  a variável é dita estritamente estável.

**Teorema 1.5.** Se  $Y$  é uma variável aleatória estável, então existe  $\alpha \in (0, 2]$  tal que  $a, b, c$  na equação (1.2) satisfazem  $c^\alpha = a^\alpha + b^\alpha$ . O valor  $\alpha$  é chamado índice de estabilidade.

*Demonstração.* Feller (1971) e Lévy (1924) apresentam a demonstração para esse teorema. □

**Definição 1.5.** Uma variável aleatória  $Y$  é dita estável se possui domínio de atração, isto é, se existem  $c_n > 0$ ,  $d_n \in \mathbb{R}$  e uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas  $Z_1, Z_2, \dots$ , tais que

$$\frac{Z_1 + \dots + Z_n - d_n}{c_n} \xrightarrow{D} Y. \quad (1.3)$$

Para a caracterização de uma variável aleatória, uma ferramenta importante é a função característica, apresentada a seguir.

**Definição 1.6.** Uma variável aleatória  $Y$  é dita estável se sua função característica é dada por:

$$\ln \Phi_Y(t) = \begin{cases} it\mu - \sigma^\alpha |t|^\alpha \left[ 1 - i\beta \operatorname{sign}(t) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \right] & , \text{ se } \alpha \neq 1 \\ it\mu - \sigma |t| \left[ 1 + i\beta \frac{2}{\pi} \operatorname{sign}(t) \ln(|t|) \right] & , \text{ se } \alpha = 1 \end{cases}$$

com  $\alpha \in (0, 2]$ ,  $\beta \in [-1, 1]$ ,  $\sigma > 0$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ .

A função  $\operatorname{sign}(t)$  é tal que

$$\operatorname{sign}(t) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } t > 0 \\ 0 & , \text{ se } t = 0 \\ -1 & , \text{ se } t < 0 \end{cases}.$$

**Notação:**  $Y \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ .

**Exemplo 1.4.** Quando  $\alpha = 2$  a função característica se reduz a  $\Phi(t) = \exp\{it\mu - \sigma^2 t^2\}$ , ou seja, a variável em questão possui distribuição Normal com média  $\mu$  e variância  $2\sigma^2$ .

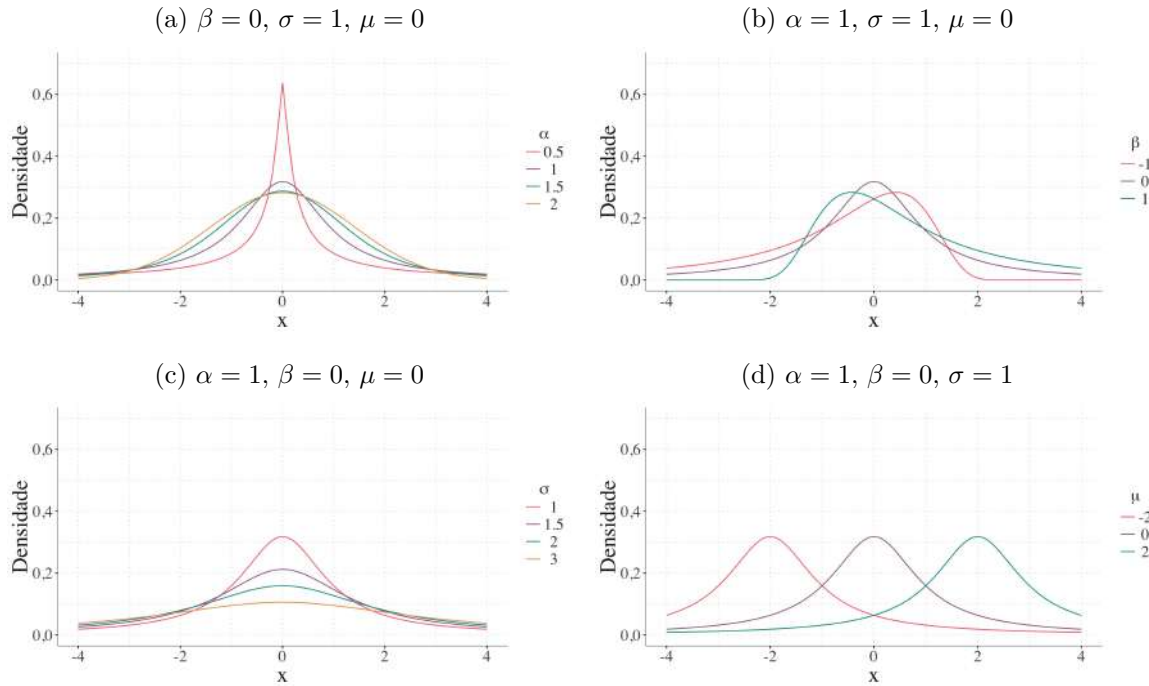
**Exemplo 1.5.** Se  $X \sim S_1(\sigma, 0, \mu)$  então  $X \stackrel{D}{=} Y$  onde  $Y \sim \text{Cauchy}(\mu, \sigma)$ .

Observando a Definição 1.6 fica claro que uma variável estável depende de quatro parâmetros:  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\sigma$  e  $\mu$ . A seção seguinte apresenta as interpretações desses parâmetros e algumas propriedades das variáveis estáveis.

## 1.1 Parâmetros e propriedades

Os parâmetros da distribuição estável apresentam interpretações relativamente simples e a influência de cada um deles na função densidade pode ser observada nos gráficos a seguir, os quais foram construídos com o auxílio dos pacotes *stabledist*<sup>1</sup> e *ggplot2*<sup>2</sup> do *software* R<sup>3</sup>.

Figura 1.1 – Densidade  $\alpha$ -estável



As figuras 1.1a, 1.1b, 1.1c e 1.1d ilustram, respectivamente, a variação dos seguintes parâmetros quando os demais estão fixos: parâmetro  $\alpha \in (0, 2]$ , chamado índice de estabilidade;  $\beta \in [-1, 1]$  denominado parâmetro de assimetria;  $\sigma > 0$ , conhecido como parâmetro de escala; e  $\mu \in \mathbb{R}$ , o parâmetro de posição.

Como é possível perceber na Figura 1.1a, o índice de estabilidade possui influência no peso das caudas e no pico da densidade. Como caso particular, quando  $\alpha = 2$  tem-se a distribuição Normal. O efeito da variação do parâmetro de assimetria pode ser visualizado na Figura 1.1b onde tem-se que, se  $\beta = 0$ , a distribuição é simétrica, se  $\beta = 1$  a distribuição apresenta assimetria total à direita e, se  $\beta = -1$  é assimétrica total à esquerda.

Já o parâmetro de posição, apresentado na Figura 1.1d, possui relação com a média da distribuição enquanto o parâmetro de escala possui um efeito semelhante ao do índice de estabilidade, referente ao peso das caudas e à variância, porém em menor intensidade.

<sup>1</sup> Wuertz, Maechler e members. (2016)

<sup>2</sup> Wickham (2009)

<sup>3</sup> R Core Team (2017)

A influência de cada um dos parâmetros será ressaltada com as propriedades que serão apresentadas a seguir.

**Propriedade 1.1.** Dado  $a \in \mathbb{R}$ , se  $Y \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ , então  $Y + a \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu + a)$ .

*Demonstração.* Utilizando as propriedades das funções características, se  $Y$  é uma variável aleatória e  $a \in \mathbb{R}$  é uma constante, tem-se que  $\Phi_{Y+a}(t) = e^{ita}\Phi_Y(t)$ . Assim, a partir da função característica apresentada na Definição 1.6,

$$\begin{aligned} \text{se } \alpha \neq 1 \quad \Phi_{Y+a}(t) &= e^{ita}\Phi_Y(t) \\ &= e^{ita}\exp\left\{it\mu - \sigma^\alpha|t|^\alpha \left[1 - i\beta \text{sin}(\alpha t) \text{tg}\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right]\right\} \\ &= \exp\left\{ita + it\mu - \sigma^\alpha|t|^\alpha \left[1 - i\beta \text{sin}(\alpha t) \text{tg}\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right]\right\} \\ &= \exp\left\{it(\mu + a) - \sigma^\alpha|t|^\alpha \left[1 - i\beta \text{sin}(\alpha t) \text{tg}\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right]\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{se } \alpha = 1 \quad \Phi_{Y+a}(t) &= e^{ita}\Phi_Y(t) \\ &= e^{ita}\exp\left\{it\mu - \sigma|t| \left[1 + i\frac{2}{\pi}\beta \text{sin}(\alpha t) \ln(|t|)\right]\right\} \\ &= \exp\left\{ita + it\mu - \sigma|t| \left[1 + i\frac{2}{\pi}\beta \text{sin}(\alpha t) \ln(|t|)\right]\right\} \\ &= \exp\left\{it(\mu + a) - \sigma|t| \left[1 + i\frac{2}{\pi}\beta \text{sin}(\alpha t) \ln(|t|)\right]\right\} \end{aligned}$$

E portanto  $Y + a \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu + a)$ .

□

**Propriedade 1.2.** Se  $Y \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$  e  $a$  é uma constante real não nula, então

$$aY \sim \begin{cases} S_\alpha\left(|a|\sigma, \frac{a}{|a|}\beta, a\mu - \frac{2a}{\pi}\ln(|a|)\sigma\beta\right) & , \text{ se } \alpha = 1 \\ S_\alpha\left(|a|\sigma, \frac{a}{|a|}\beta, a\mu\right) & , \text{ se } \alpha \neq 1 \end{cases}$$

*Demonstração.* Por propriedade da função característica  $\Phi_{aY}(t) = \Phi_Y(at)$ . Portanto, a partir da função característica definida em 1.6,

$$\begin{aligned} \text{se } \alpha \neq 1 \quad \Phi_{aY}(t) &= \exp\left\{iat\mu - \sigma^\alpha|at|^\alpha \left[1 - i\beta \text{sin}(\alpha at) \text{tg}\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right]\right\} \\ &= \exp\left\{it(a\mu) - (\sigma|a|)^\alpha|t|^\alpha \left[1 - i\left(\beta\frac{a}{|a|}\right) \text{sin}(\alpha t) \text{tg}\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right]\right\} \\ \Rightarrow \quad aY &\sim S_\alpha\left(|a|\sigma, \frac{a}{|a|}\beta, a\mu\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{se } \alpha = 1 \quad \Phi_{aY}(t) &= \exp \left\{ iat\mu - \sigma|at| \left[ 1 + i\beta \frac{2}{\pi} \text{sign}(at) \ln(|at|) \right] \right\} \\
&= \exp \left\{ it(a\mu) - (\sigma|a|)|t| \left[ 1 + i \left( \beta \frac{2}{\pi} \frac{a}{|a|} \right) \text{sign}(t) [\ln(|t|) + \ln(|a|)] \right] \right\} \\
&= \exp \left\{ it(a\mu) - (\sigma|a|)|t| \left[ 1 + i \left( \beta \frac{2a}{\pi|a|} \right) \text{sign}(t) \ln(|t|) \right] - i \frac{2}{\pi} \beta at \sigma \ln(|a|) \right\} \\
&= \exp \left\{ it \left( a\mu - \frac{2}{\pi} \beta a \sigma \ln(|a|) \right) - (\sigma|a|)|t| \left[ 1 + i \left( \beta \frac{2}{\pi} \frac{a}{|a|} \right) \text{sign}(t) \ln(|t|) \right] \right\} \\
\Rightarrow \quad aY &\sim S_\alpha \left( |a|\sigma, \frac{a}{|a|}\beta, a\mu - \frac{2}{\pi} \beta a \sigma \ln(|a|) \right)
\end{aligned}$$

□

Utilizando a Definição 1.3, como caso particular da Propriedade 1.2, se  $\beta = 0$  a distribuição é simétrica em torno de  $\mu$ . Além disso, como é possível observar na Figura 1.1b, se  $\beta < 0$  a distribuição é assimétrica à esquerda e se  $\beta > 0$  é assimétrica à direita.

**Propriedade 1.3.** Se  $Y$  é estável e  $\mu = 0$ , então

$$Y \sim S_\alpha(\sigma, \beta, 0) \Leftrightarrow -Y \sim S_\alpha(\sigma, -\beta, 0).$$

*Demonstração.* A Propriedade 1.3 é um caso particular da Propriedade 1.2 onde  $a = -1$  e  $\mu = 0$ .

□

A propriedade a seguir permite identificar  $\alpha$  como parâmetro de cauda.

**Propriedade 1.4.** Se  $Y \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$  então

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^\alpha P(X > \lambda) &= C_\alpha \frac{1 + \beta}{2} \sigma^\alpha \\
\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^\alpha P(X < -\lambda) &= C_\alpha \frac{1 - \beta}{2} \sigma^\alpha
\end{aligned}$$

$$\text{com } C_\alpha = \frac{1}{\int_0^\infty x^{-\alpha} \text{sen}(x) dx} = \begin{cases} \frac{1-\alpha}{\Gamma(2-\alpha) \cos(\frac{\pi\alpha}{2})} & , \text{ se } \alpha \neq 1 \\ \frac{2}{\pi} & , \text{ se } \alpha = 1 \end{cases}$$

A seguir serão apresentadas propriedades de variáveis com distribuição simétrica.

**Propriedade 1.5.** Uma variável aleatória  $X$  é simétrica se, e somente se, sua função característica é real.

*Demonstração.* A função característica de uma variável aleatória  $X$  é dada por

$$\Phi_X(t) = E(e^{itX}) = E[\cos(tX)] + iE[\text{sen}(tX)]$$

e portanto

$$\begin{aligned}\Phi_{-X}(t) &= E\left(e^{it(-X)}\right) = E[\cos(-tX)] + iE[\sin(-tX)] \\ &= E[\cos(tX)] - iE[\sin(tX)].\end{aligned}$$

Somando as duas equações obtêm-se  $\Phi_X(t) + \Phi_{-X}(t) = 2E[\cos(tX)]$ . Assim,

- (i) se  $X$  é simétrica, então  $X \stackrel{D}{=} -X$  e  $\Phi_X(t) = \Phi_{-X}(t)$  e portanto a função característica se resume a  $\Phi_X(t) = E[\cos(tX)] \in \mathbb{R}$ ;
- (ii) sabendo que  $\Phi_X(t) \in \mathbb{R}$  para todo  $t$  se, e somente se,  $\Phi_X(t) = E[\cos(tX)]$ , e utilizando as equações apresentadas acima, tem-se que  $\Phi_X(t) = \Phi_{-X}(t) \Rightarrow X \stackrel{D}{=} -X$ , ou seja, a variável é simétrica.

□

**Propriedade 1.6.** *Se duas variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  são independentes e simétricas então  $X - Y$  e  $X + Y$  também são simétricas.*

*Demonstração.* Se  $X$  e  $Y$  são independentes tem-se que  $\Phi_{X+Y}(t) = \Phi_X(t)\Phi_Y(t)$ . Pela Propriedade 1.5, se  $X$  e  $Y$  são simétricas então ambas as funções características são reais, portanto sua multiplicação também será real, o que implica que  $X + Y$  é simétrica.

Para  $X - Y$ , como assumiu-se que  $Y$  é simétrica,  $Y \stackrel{D}{=} -Y \Rightarrow \Phi_Y(t) = \Phi_{-Y}(t)$ , tem-se então que  $\Phi_{X-Y}(t) = \Phi_X(t)\Phi_{-Y}(t) = \Phi_X(t)\Phi_Y(t) = \Phi_{X+Y}$  e portanto  $X - Y$  também é simétrica.

□

**Propriedade 1.7.** *Se  $X_1, \dots, X_n$  são cópias independentes de uma variável aleatória simétrica  $X$  então  $S_n = X_1 + \dots + X_n$  também é simétrica.*

*Demonstração.* A Propriedade 1.7 é uma extensão da Propriedade 1.6 para a soma de  $n$  variáveis aleatórias e está demonstrada em Sampaio (2006).

□

**Propriedade 1.8.** *Se a variável aleatória  $X$  é estável e independente de  $Y$  com  $X \stackrel{D}{=} Y$  então  $X - Y$  é estável e simétrica.*

*Demonstração.* Dadas as variáveis aleatórias estáveis independentes  $X$  e  $Y$  com  $X \stackrel{D}{=} Y$ , pela Sefinição 1.2, tem-se que  $X_1 + \dots + X_n \stackrel{D}{=} c_n X + d_n$  e  $Y_1 + \dots + Y_n \stackrel{D}{=} c_n Y + d_n$  com  $X_1, \dots, X_n$  cópias independentes de  $X$  e  $Y_1, \dots, Y_n$  cópias independentes de  $Y$ . Subtraindo as equações obtêm-se

$$(X_1 - Y_1) + \dots + (X_n - Y_n) \stackrel{D}{=} c_n (X - Y)$$

e

$$(Y_1 - X_1) + \dots + (Y_n - X_n) \stackrel{D}{=} c_n (Y - X).$$

Portanto,  $(X - Y)$  é estável e simétrica.

□

**Propriedade 1.9.** *Sejam  $X$  e  $Y$  variáveis aleatórias independentes com  $X \sim S_\alpha(\sigma_X, \beta_X, \mu_X)$  e  $Y \sim S_\alpha(\sigma_Y, \beta_Y, \mu_Y)$ . Então  $X+Y \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$  com  $\sigma = (\sigma_X^\alpha + \sigma_Y^\alpha)^{1/\alpha}$ ,  $\beta = \frac{\beta_X \sigma_X^\alpha + \beta_Y \sigma_Y^\alpha}{\sigma_X^\alpha + \sigma_Y^\alpha}$  e  $\mu = \mu_X + \mu_Y$ .*

*Demonstração.* Dadas  $X$  e  $Y$  variáveis aleatórias independentes com  $X \sim S_\alpha(\sigma_X, \beta_X, \mu_X)$  e  $Y \sim S_\alpha(\sigma_Y, \beta_Y, \mu_Y)$ , por independência:

$$\begin{aligned} \Phi_{X+Y}(t) &= \Phi_X(t) \Phi_Y(t) \\ \Rightarrow \ln[\Phi_{X+Y}(t)] &= \ln[\Phi_X(t)] + \ln[\Phi_Y(t)] \end{aligned}$$

– Para  $\alpha \neq 1$ :

$$\begin{aligned} \ln[\Phi_{X+Y}(t)] &= \ln[\Phi_X(t)] + \ln[\Phi_Y(t)] \\ &= it\mu_X - \sigma_X^\alpha |t|^\alpha \left[ 1 - i\beta_X \text{sin}(\alpha t) \text{tg}\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \right] + it\mu_Y - \sigma_Y^\alpha |t|^\alpha \left[ 1 - i\beta_Y \text{sin}(\alpha t) \text{tg}\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \right] \\ &= it(\mu_X + \mu_Y) - |t|^\alpha (\sigma_X^\alpha + \sigma_Y^\alpha) + i \text{sin}(\alpha t) \text{tg}\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) (\beta_X \sigma_X^\alpha + \beta_Y \sigma_Y^\alpha) \\ &= it(\mu_X + \mu_Y) - |t|^\alpha (\sigma_X^\alpha + \sigma_Y^\alpha) \left[ 1 - i \frac{\beta_X \sigma_X^\alpha + \beta_Y \sigma_Y^\alpha}{\sigma_X^\alpha + \sigma_Y^\alpha} \text{sin}(\alpha t) \text{tg}\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

– Para  $\alpha = 1$ :

$$\begin{aligned} \ln[\Phi_{X+Y}(t)] &= \ln[\Phi_X(t)] + \ln[\Phi_Y(t)] \\ &= it\mu_X - \sigma_X |t| \left[ 1 + i\beta_X \frac{2}{\pi} \text{sin}(\alpha t) \ln(|t|) \right] + it\mu_Y - \sigma_Y |t| \left[ 1 + i\beta_Y \frac{2}{\pi} \text{sin}(\alpha t) \ln(|t|) \right] \\ &= it(\mu_X + \mu_Y) - |t|(\sigma_X + \sigma_Y) - i \frac{2}{\pi} \text{sin}(\alpha t) \ln(|t|) (\beta_X \sigma_X + \beta_Y \sigma_Y) \\ &= it(\mu_X + \mu_Y) - |t|(\sigma_X + \sigma_Y) \left[ 1 + i \frac{\beta_X \sigma_X + \beta_Y \sigma_Y}{\sigma_X + \sigma_Y} \frac{2}{\pi} \text{sin}(\alpha t) \ln(|t|) \right] \end{aligned}$$

$$\therefore X + Y \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu), \text{ com } \sigma = (\sigma_X^\alpha + \sigma_Y^\alpha)^{1/\alpha}, \beta = \frac{\beta_X \sigma_X^\alpha + \beta_Y \sigma_Y^\alpha}{\sigma_X^\alpha + \sigma_Y^\alpha} \text{ e } \mu = \mu_X + \mu_Y.$$

□

**Propriedade 1.10.** *Se  $Y$  é uma variável aleatória estável então  $Y$  é estritamente estável se, e somente se,  $\mu = 0$ , para  $\alpha \neq 1$ , ou  $\mu = 0$  e  $\beta = 0$  para  $\alpha = 1$ .*

*Demonstração.* Considere  $Y \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$  e  $Y_1$  e  $Y_2$  cópias independentes de  $Y$ . Se  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $c > 0$  e  $d \in \mathbb{R}$  são constantes tem-se, pelas propriedades 1.1 e 1.2,

$${}_a Y_1 \sim \begin{cases} S_\alpha\left(a\sigma, \beta, a\mu - \frac{2a}{\pi} \ln(a) \sigma \beta\right) & , \text{ se } \alpha = 1 \\ S_\alpha(a\sigma, \beta, a\mu) & , \text{ se } \alpha \neq 1 \end{cases},$$



$$bY_1 \sim \begin{cases} S_\alpha \left( b\sigma, \beta, b\mu - \frac{2b}{\pi} \ln(b) \sigma \beta \right) & , \text{ se } \alpha = 1 \\ S_\alpha \left( |b|\sigma, \frac{b}{|b|}\beta, b\mu \right) & , \text{ se } \alpha \neq 1 \end{cases}$$

e

$$cY + d \sim \begin{cases} S_\alpha \left( c\sigma, \beta, c\mu - \frac{2c}{\pi} \ln(c) \sigma \beta + d \right) & , \text{ se } \alpha = 1 \\ S_\alpha (c\sigma, \beta, c\mu + d) & , \text{ se } \alpha \neq 1 \end{cases}.$$

Assim, pela Propriedade 1.9,

$$aY_1 + bY_2 \sim \begin{cases} S_\alpha \left( (a^\alpha + b^\alpha)^{1/\alpha} \sigma, \beta, (a+b)\mu - \frac{2}{\pi} \sigma \beta [a \ln(a) - b \ln(b)] \right) & , \text{ se } \alpha = 1 \\ S_\alpha \left( (a^\alpha + b^\alpha)^{1/\alpha} \sigma, \beta, (a+b)\mu \right) & , \text{ se } \alpha \neq 1 \end{cases}.$$

Utilizando a Definição 1.4 é possível escrever  $Y$  na forma  $cY + d \stackrel{D}{=} aY_1 + bY_2$ . Portanto, se  $c = (a^\alpha + b^\alpha)^{1/\alpha}$ , para  $\alpha \neq 1$ ,  $Y$  é estritamente estável, ou, equivalentemente,  $d = 0$ , se, e somente se,  $\mu = 0$  e, para  $\alpha = 1$ , se, e somente se  $\mu = 0$  e  $\beta = 0$ .

□

As propriedades apresentadas a seguir caracterizam os momentos de uma variável estável.

**Propriedade 1.11.** *Seja  $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$  com  $0 < \alpha < 2$ . Então, o momento de ordem  $p$  existe e é finito,  $E(|X|^p) < \infty$ , se, e somente se,  $0 < p < \alpha$ .*

Como caso particular, o segundo momento existe para uma distribuição estável apenas se  $\alpha = 2$ , ou seja, no caso da distribuição Normal. Já o primeiro momento existe quando  $\alpha > 1$  e será caracterizado na propriedade a seguir.

**Propriedade 1.12.** *Se  $Y \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$  com  $1 < \alpha \leq 2$  então a esperança de  $Y$  é igual ao parâmetro de posição  $\mu$ .*

*Demonstração.* Considere  $Y \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$  com  $1 < \alpha \leq 2$ . Pela Propriedade 1.11 e sabendo que, quando  $\alpha = 2$ ,  $Y$  tem distribuição Normal tem-se que o primeiro momento de  $Y$  é finito. Pela Propriedade 1.1  $Y - \mu \sim S_\alpha(\sigma, \beta, 0)$  e, como  $\alpha \neq 1$ , pela Propriedade 1.10,  $Y - \mu$  é portanto estritamente estável.

Dessa forma, pela Definição 1.4 e pelo Teorema 1.3, se  $Y_1$  e  $Y_2$  são cópias independentes de  $Y$ ,  $Y - \mu$  pode ser escrito como  $(a^\alpha + b^\alpha)^{1/\alpha} (Y - \mu) \stackrel{D}{=} a(Y_1 - \mu) + b(Y_2 - \mu)$  para quaisquer constantes  $a$  e  $b$  positivas. Aplicando a esperança em ambos os lados da

equação obtém-se

$$\begin{aligned} (a^\alpha + b^\alpha)^{1/\alpha} [E(Y) - \mu] &= a [E(Y_1) - \mu] + b [E(Y_2) - \mu] \\ \Rightarrow (a^\alpha + b^\alpha)^{1/\alpha} [E(Y) - \mu] &= a [E(Y) - \mu] + b [E(Y) - \mu] \\ \Rightarrow (a^\alpha + b^\alpha)^{1/\alpha} [E(Y) - \mu] &= (a + b) [E(Y) - \mu]. \end{aligned}$$

Como  $a > 0$  e  $b > 0$   $(a^\alpha + b^\alpha)^{1/\alpha} \neq a + b$ , o que implica que  $E(Y) - \mu = 0$ , ou seja,  $E(Y) = \mu$ .

□

Para complementar a caracterização a variáveis estáveis, a seção seguinte apresenta algumas propriedades relativas à função densidade dessas variáveis.

## 1.2 Função de probabilidade acumulada

A função de probabilidade acumulada das variáveis estáveis possui forma fechada apenas para alguns casos. São eles:

- quando  $\alpha = 2$ , nesse caso a variável apresenta distribuição Normal;
- quando  $\alpha = 1$  e  $\beta = \pm 1$ , sabe-se que a distribuição é Cauchy; e
- quando  $\alpha = \frac{1}{2}$  e  $\beta = \pm 1$  obtém-se distribuição de Lévy.

Apesar de não possuir forma fechada, é possível obter aproximações para a função de distribuição a partir de diferentes métodos, alguns dos quais são apresentados em Sampaio (2012).

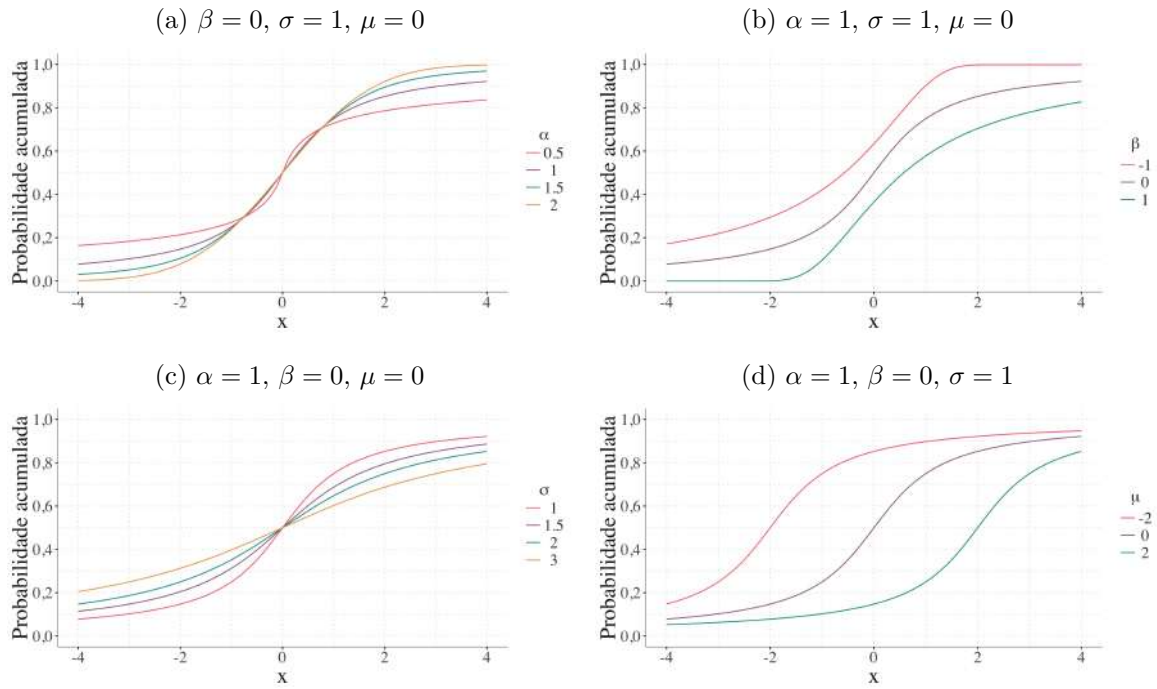
Assim como no caso da função densidade, na função de probabilidade acumulada, também é possível distinguir de forma clara o efeito de cada um dos parâmetros da distribuição.

Dessa forma, utilizando métodos numéricos implementados no *software* R<sup>4</sup> no pacote *stabledist*<sup>5</sup>, foram construídos os gráficos a seguir com o auxílio do pacote *ggplot2*<sup>6</sup> para a visualização do efeito da variação de cada um dos parâmetros na função de distribuição de probabilidade.

<sup>4</sup> R Core Team (2017)

<sup>5</sup> Wuertz, Maechler e members. (2016)

<sup>6</sup> Wickham (2009)

Figura 1.2 – Distribuição  $\alpha$ -estável

Mesmo para os casos em que não se possui forma fechada, a função densidade da distribuição estável apresenta algumas propriedades que serão descritas a seguir.

**Propriedade 1.13.** *A distribuição estável tem função densidade de probabilidade contínua e infinitamente diferenciável.*

**Propriedade 1.14.** *O suporte da distribuição estável é:*

- a reta real quando  $|\beta| \neq 1$  ou  $\alpha \geq 1$ ;
- os reais maiores que  $\mu$  quando  $\beta = 1$  e  $\alpha < 1$ ; e
- os reais menores que  $\mu$  quando  $\beta = -1$  e  $\alpha < 1$ .

**Propriedade 1.15.** *A distribuição estável é unimodal sendo que, para as distribuições simétricas, quando  $1 < \alpha \leq 2$ , a moda coincide com a média. Para outros casos, a moda não possui forma fechada.*

A distribuição estável caracterizada nesse capítulo será utilizada nos capítulos seguintes como a distribuição dos termos de erros dos modelos que serão apresentados.



## 2 Modelos para séries temporais

As seções seguintes apresentam os modelos que serão ajustados aos dados visando comparar a capacidade de previsão entre os mesmos e o efeito de supor distribuição estável para os resíduos.

Assim, considere  $X_t = \ln(P_t) - \ln(P_{t-1})$  uma série de retornos de uma variável  $P_t$ . Para  $\mathcal{F}_{t-1} = \{X_1, X_2, \dots, X_{t-2}, X_{t-1}\}$ , ou seja, toda informação até o tempo  $t - 1$ , tem-se  $\eta_t = E(X_t | \mathcal{F}_{t-1})$  e  $h_t^2 = \text{Var}(X_t | \mathcal{F}_{t-1})$ . Supondo  $\eta_t = 0$ , então  $h_t^2 = E(X_t^2 | \mathcal{F}_{t-1})$ . Considere ainda que a média e a variância não condicionais são constantes, ou seja,  $E(X_t) = \eta$ ,  $\text{Var}(X_t) = h^2$ .

Para melhor compreensão de algumas propriedades dos modelos que serão apresentados, deve-se primeiramente definir o que é um processo estacionário.

**Definição 2.1.** Um processo estocástico  $\{Z_t, t \in T\}$ , onde  $T$  é um conjunto arbitrário, é estritamente estacionário se todas as distribuições finito dimensionais são invariantes sob translação no tempo, ou seja,  $P(Z_{t_1} \leq z_1, \dots, Z_{t_n} \leq z_n) = P(Z_{t_1+\tau} \leq z_1, \dots, Z_{t_n+\tau} \leq z_n)$  para quaisquer  $t_1, \dots, t_n, t_1 + \tau, \dots, t_n + \tau$  pertencentes a  $T$ .

Como consequência imediata tem-se que um processo estritamente estacionário possui média e variância constante e função de autocovariância dependendo apenas da diferença entre os tempos ( $\text{Cov}(Z_{t_1}, Z_{t_2}) = \gamma_{|\tau|}$ , com  $\tau = t_1 - t_2$ ). Além disso, pode-se supor, sem perda de generalidade, que a média do processo é zero, ou utilizar o processo da forma  $\{Z_t - \eta, t \in T\}$ .

**Definição 2.2.** Um processo  $\{Z_t, t \in T\}$  é dito fracamente estacionário, ou estacionário de segunda ordem, se, e somente se,

- i. sua média for constante,  $E(Z_t) = \eta_t = \eta$  para todo  $t \in T$ ;
- ii. sua variância for finita,  $\text{Var}(Z_t) < \infty$  para todo  $t \in T$ ; e
- iii. sua função de autocovariância depender somente da diferença entre os tempos,  $\text{Cov}(Z_{t_1}, Z_{t_2}) = \gamma_{|\tau|}$ , com  $t_1, t_2 \in T$  e  $\tau = t_1 - t_2$ .

Algumas características importantes de processos estocásticos são a causalidade e a invertibilidade, definidas a seguir.

**Definição 2.3.** Um processo estocástico  $\{X_t, t \in T\}$  é causal se pode ser escrito na forma  $X_t = \Xi(B) \varepsilon_t$  com  $\Xi(B) = 1 + \xi_1 B + \xi_2 B^2 + \dots$  e  $\sum_{j \geq 1} |\xi_j| < \infty$ .

**Definição 2.4.** Um processo estocástico  $\{X_t, t \in T\}$  é dito invertível se pode ser escrito na forma  $\varepsilon_t = \Lambda(B) X_t$  com  $\Lambda(B) = 1 + \lambda_1 B + \lambda_2 B^2 + \dots$  e  $\sum_{j \geq 1} |\lambda_j| < \infty$ .

## 2.1 Modelo ARMA

Os modelos ARMA (*"Autoregressive Moving Average"*) são modelos lineares que descrevem processos estocásticos em termos de duas partes, um polinômio autorregressivo (AR), que modela o processo como uma combinação dos valores anteriores, e um de médias móveis (MA), o qual faz com que o valor atual dependa dos erros anteriores.

**Definição 2.5.** Um processo  $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$  é ARMA( $p, q$ ),  $p, q \in \mathbb{N}$  se satisfaz:

$$\Psi(B) X_t = \Theta(B) \varepsilon_t \quad (2.1)$$

com  $\varepsilon_t$  uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com média zero e variância um,  $\Psi(B) = 1 - \sum_{i=1}^p \psi_i B^i$  e  $\Theta(B) = 1 + \sum_{i=1}^q \theta_i B^i$ , onde  $B$  é o operador de defasagens tal que  $B^k A_t = A_{t-k}$ .

Na Definição 2.5, se  $p = 0$  o processo se reduz à um modelo de médias móveis de ordem  $q$  enquanto se  $q = 0$  tem-se um processo autorregressivo de ordem  $p$ . Se  $p = q = 0$  então o processo é um ruído branco.

É possível isolar o processo ou o termo de erro da forma  $X_t = \Xi(B) \varepsilon_t$  com  $\Xi(B) = \Psi^{-1}(B) \Theta(B)$  ou  $\varepsilon_t = \Lambda(B) X_t$  com  $\Lambda(B) = \Theta^{-1}(B) \Psi(B)$ . A condição de estacionariedade (e/ou causalidade) é que as raízes de  $\Psi(B)$  estejam fora do disco unitário e a condição de invertibilidade é que as raízes de  $\Theta(B)$  estejam fora do disco unitário. Tem-se ainda que, se um modelo ARMA( $m, n$ ) é causal, o processo pode ser entendido como uma média móvel infinita, denotada por MA( $\infty$ ).

Uma das formas de identificar qual ordem do modelo ARMA ajustar, ou seja, quais valores escolher para  $m$  e  $n$  na Definição 2.5 é utilizando os gráficos de autocorrelação e autocorrelação parcial. Um processo AR( $m$ ) tem função de autocorrelação (f.a.c.) infinita que decai exponencialmente e/ou de acordo com senoides amortecidas e função de autocorrelação parcial (f.a.c.p.) apresentando um corte após a defasagem  $m$ . Já um processo MA( $n$ ) tem f.a.c. com corte após a defasagem  $n$  e f.a.c.p. de maneira semelhante à f.a.c. de um processo autorregressivo. Por fim, um processo ARMA( $m, n$ ) possui f.a.c. infinita que decai de acordo com exponenciais e/ou senoides amortecidas, como no processo AR, mas esse decaimento inicia-se após a defasagem  $(n - m)$  e sua f.a.c.p. se comporta de maneira similar à do processo de médias móveis.

Dado  $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$  um processo ARMA( $m, n$ ) estacionário e causal com inovações,  $\varepsilon_t$ , seguindo a distribuição Normal padrão, a distribuição do processo condicionado à toda informação passada também é Gaussiana, ou seja,  $X_t | \mathcal{F}_{t-1} \sim \mathcal{N} \left( \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \varepsilon_{t-i}, h^2 \right)$ . Além disso, a função de autocovariância é dada por  $\gamma_\tau = h^2 \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \xi_{i+|\tau|}$ .

Dessa forma, tem-se que a variância condicional é constante enquanto a média condicional depende do passado, diferenciando esse modelo dos modelos GARCH, apresentados na seção seguinte.

## 2.2 Modelo GARCH

Primeiramente será apresentado o modelo ARCH ("*Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*"), ou modelo autorregressivo com heterocedasticidade condicional. O modelo ARCH foi introduzido por Engle (1982) para modelar uma série onde os retornos ( $X_t$ ) são não correlacionados mas a variância condicional, ou volatilidade, depende de informações anteriores.

**Definição 2.6.** Um processo  $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$  segue um modelo  $ARCH(s)$ ,  $s \in \mathbb{N}$ , se satisfaz:

$$X_t = h_t \varepsilon_t \quad (2.2)$$

e

$$h_t^2 = v_0 + \sum_{i=1}^s (v_i X_{t-i}^2) \quad (2.3)$$

com  $\varepsilon_t$  uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com média zero e variância um,  $v_0 > 0$ ,  $v_s > 0$  e  $v_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, s-1$ .

Usualmente supõe-se que as inovações,  $\varepsilon_t$ , possuem distribuição t-Student ou Normal. Entretanto, para que esse modelo seja capaz de captar caudas pesadas, uma opção é utilizar a distribuição  $\alpha$ -estável.

Uma generalização do modelo ARCH, o modelo GARCH ("*Generalized ARCH*"), foi apresentada por Bollerslev (1986) como uma forma alternativa de descrever a variância condicional com menos parâmetros que um modelo ARCH. Assim como os modelos ARCH, os GARCH pertencem à classe de modelos não lineares utilizados para modelar agrupamentos de volatilidade.

**Definição 2.7.** Um processo  $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$  segue um modelo  $GARCH(r, s)$ ,  $r, s \in \mathbb{N}$ , se satisfaz:

$$X_t = h_t \varepsilon_t \quad (2.4)$$

e

$$h_t^2 = v_0 + \sum_{i=1}^s (v_i X_{t-i}^2) + \sum_{j=1}^r (\zeta_j h_{t-j}^2) \quad (2.5)$$

sendo:  $\varepsilon_t$  uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com média zero e variância constante;  $v_0 > 0$ ,  $v_s > 0$ ,  $v_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, s-1$ ; e  $\zeta_r > 0$ ,  $\zeta_j \geq 0$ ,  $j = 1, \dots, r-1$ .

**Observação 2.1.** A condição  $\sum_{i=1}^r \zeta_i + E(\varepsilon_0^2) \sum_{j=1}^s v_j < 1$  é usualmente imposta para que o modelo seja estacionário. A demonstração dessa condição de estacionariedade encontra-se em Bollerslev (1986).

Observando a Definição 2.7 é possível perceber que grandes volatilidades são geradas por grandes valores da série, tanto negativos quanto positivos, ou grandes volatilidades anteriores. É possível perceber também que, se  $r = 0$ , o modelo reduz para um  $ARCH(s)$  e, se  $r$  e  $s$  são nulos,  $X_t = \sqrt{v_0} \varepsilon_t$  é um ruído branco.

Além disso, Bollerslev (1986) mostra que, sob certas condições, um modelo GARCH pode ser visto como o modelo ARCH de ordem infinita, denotado por  $ARCH(\infty)$ , de forma análoga à relação existente entre os modelos ARMA e MA.

Assim como no modelo ARCH, usualmente supõe-se que  $\varepsilon_t$  segue uma distribuição Normal ou uma t-Student, porém, caudas pesadas são capturadas de forma mais precisa supondo, por exemplo, distribuição  $\alpha$ -estável.

A seguir serão apresentadas algumas propriedades para o modelo GARCH quando as inovações possuem distribuição Gaussiana e  $\alpha$ -estável.

**Propriedade 2.1.** Dado  $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$  um processo  $GARCH(r, s)$  como definido em 2.7, se as inovações,  $\{\varepsilon_t\}$ , forem Gaussianas, então a distribuição condicional do processo também será Normal com variância dependendo do tempo, isto é,  $X_t | \mathcal{F}_{t-1} \sim \mathcal{N}(0, h_t^2)$ .

Se  $\varepsilon_t$  na Definição 2.7 é uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com variância finita, como no caso particular da distribuição Normal, então um preditor ótimo para  $h_t^2$  é descrito em Baillie e Bollerslev (1992).

Para o caso em que as inovações possuem distribuição  $\alpha$ -estável, um processo  $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$  que satisfaz as equações (2.4) e (2.5) é dito um processo GARCH  $\alpha$ -estável. Como mencionado no capítulo anterior, um caso particular das distribuições estáveis, quando  $\alpha = 2$ , é a distribuição Gaussiana, portanto, nesse caso o processo possui as propriedades apresentadas anteriormente.

Quando  $\varepsilon_t$  possui segundo momento infinito, como na distribuição  $\alpha$ -estável com  $0 < \alpha < 2$  o método descrito por Baillie e Bollerslev (1992) citado não é válido. Assim, um novo método para obter os preditores do modelo GARCH com inovações  $\alpha$ -estáveis, o qual também é válido para modelos GARCH cujas inovações possuem variância finita, é apresentado em Mohammadi (2017) e será descrito a seguir.

**Teorema 2.1.** Considere um processo  $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$   $GARCH(r, s)$  como descrito na Definição 2.7. Considere ainda que as inovações,  $\varepsilon_t$ , apresentam distribuição  $\alpha$ -estável com



$0 < \alpha < 2$ . Assim, se  $\sum_{i=1}^m E(\zeta_i + v_i \varepsilon_i^2)^{1/2} < 1$ , com  $m = \max(r, s)$ , então  $X_t$  apresenta uma solução estritamente estacionária e  $E(h_t) < \infty$ .

*Demonstração.* A demonstração desse teorema encontra-se em Mohammadi (2017). □

Como o modelo GARCH é utilizado para modelar a volatilidade, deseja-se obter, além da previsão de valores futuros da série, a esperança condicional da variância em tempos futuros, ou seja, dadas  $X_1, \dots, X_t$  realizações de um processo GARCH  $\alpha$ -estável até o tempo  $t$ , obter uma aproximação para  $E(h_{t+\tau}^2 | \mathcal{F}_t) = E_t(h_{t+\tau}^2)$ , a esperança condicional da variância no tempo  $t + \tau$ , em termos dos valores do processo até o tempo  $t$ .

Assim, se na Definição 2.7  $s > 1$ , então, utilizando a equação (2.5), tem-se a seguinte representação matricial:

$$\begin{pmatrix} h_{t+\tau}^2 \\ h_{t+\tau-1}^2 \\ \vdots \\ h_{t+\tau-r+1}^2 \\ X_{t+\tau-1}^2 \\ X_{t+\tau-2}^2 \\ \vdots \\ X_{t+\tau-s}^2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta_1 + v_1 \varepsilon_{t+\tau-1}^2 & \zeta_2 & \cdots & \zeta_{r-1} & \zeta_r & v_2 & \cdots & v_{s-1} & v_s & v_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon_{t+\tau-1}^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{t+\tau-1}^2 \\ h_{t+\tau-2}^2 \\ \vdots \\ h_{t+\tau-r}^2 \\ X_{t+\tau-2}^2 \\ X_{t+\tau-3}^2 \\ \vdots \\ X_{t+\tau-s+1}^2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a qual pode ser escrita como

$$W_{t+\tau} = \Gamma_{t+\tau} W_{t+\tau-1}. \quad (2.6)$$

Substituindo repetidamente a equação (2.6) nela mesma obtém-se

$$W_{t+\tau} = \left( \prod_{j=0}^{\tau-1} \Gamma_{t+\tau-j} \right) W_t. \quad (2.7)$$

Se  $e_j$  é um vetor coluna de zeros exceto na linha  $j$  onde assume o valor 1, tem-se que, multiplicando  $e_1'$  nos dois lados da equação (2.7) obtém-se  $h_{t+\tau}^2 = e_1' \left( \prod_{j=0}^{\tau-1} \Gamma_{t+\tau-j} \right) W_t$ , o estimador para a variância condicional no tempo  $t$ .

De forma análoga, para  $s = 1$  tem-se a seguinte representação matricial:

$$\begin{pmatrix} h_{t+\tau}^2 \\ h_{t+\tau-1}^2 \\ \vdots \\ h_{t+\tau-r+1}^2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta_1 + v_1 \varepsilon_{t+\tau-1}^2 & \zeta_2 & \cdots & \zeta_{r-1} & \zeta_r & v_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{t+\tau-1}^2 \\ h_{t+\tau-2}^2 \\ \vdots \\ h_{t+\tau-r}^2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

que pode ser escrita como  $V_{t+\tau} = G_{t+\tau} V_{t+\tau-1}$ . Utilizando um procedimento semelhante ao realizado anteriormente, obtém-se  $h_{t+\tau}^2 = e_1' \left( \prod_{j=0}^{\tau-1} G_{t+\tau-j} \right) V_t$  para  $\tau \geq 2$ .

Note que  $E_t(h_{t+1}^2) = h_{t+1}$ . Além disso, é possível estimar  $E(|\varepsilon_0|)$  a partir da média das estimativas de  $\varepsilon_0$ , as quais, segundo Mohammadi (2017), podem ser obtidas utilizando o pacote *GEVStableGarch*<sup>1</sup> do *software* R. Assim, valores futuros do processo podem ser preditos utilizando  $E_t(|Z_{t+\tau}|) = E_t(h_{t+\tau}) E(|\varepsilon_0|)$ .

Mohammadi (2017) cita ainda que há na literatura uma forma fechada para  $E(|\varepsilon_0|)$ , entretanto, após obter a estimativa dos parâmetros da distribuição das inovações é possível estimar  $E(|\varepsilon_0|)$  como descrito anteriormente.

Como uma forma de adequar o modelo GARCH à dados que possui uma estrutura de autocorrelação introduziu-se o modelo ARMA-GARCH que consiste em uma combinação dos modelos ARMA e GARCH.

**Definição 2.8.** Um processo  $\{Z_t, t \in \mathbb{Z}\}$  segue um modelo ARMA-GARCH( $p, q, r, s$ ),  $p, q, r, s \in \mathbb{Z}$  se:

$$\Psi(B) Z_t = \eta + \Theta(B) X_t \quad (2.8)$$

onde  $X_t$  e  $h_t$  satisfazem as equações (2.4) e (2.5),  $\Psi(B) = 1 - \sum_{i=1}^p \psi_i B^i$ ,  $\Theta(B) = 1 + \sum_{i=1}^q \theta_i B^i$  e  $B$  é o operador de defasagem.

Assim como no modelo GARCH, no modelo ARMA-GARCH as inovações podem possuir diversas distribuições, como forma de tentar capturar caudas pesadas, uma opção é utilizar a distribuição estável.

A seção seguinte apresenta outro modelo utilizado para modelar a volatilidade das séries denominado APARCH. Tal modelo possui o modelo GARCH como caso particular.

<sup>1</sup> Sousa, Otiniano e Lopes (2017)

## 2.3 Modelo APARCH

O modelo APARCH (*"Asymmetric Power ARCH"*) foi apresentado por Ding, Granger e Engle (1993) como outra forma de modelar a volatilidade e capturar a correlação existente entre os dados.

**Definição 2.9.** Um processo  $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$  segue um modelo APARCH( $r, s$ ),  $r, s \in \mathbb{N}$ , se satisfaz:

$$X_t = h_t \varepsilon_t \quad (2.9)$$

e

$$h_t^\delta = v_0 + \sum_{i=1}^s \left( v_i (X_{t-i} - \omega_i |X_{t-i}|)^\delta \right) + \sum_{j=1}^r \left( \zeta_j h_{t-j}^\delta \right) \quad (2.10)$$

com  $\varepsilon_t$  uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com média zero e variância constante;  $v_0 > 0$ ,  $v_s > 0$ ,  $v_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, s-1$ ;  $\zeta_r > 0$ ,  $\zeta_j \geq 0$ ,  $j = 1, \dots, r-1$ ;  $|\omega_i| < 1$ ,  $i = 1, \dots, s-1$ ; e  $\delta > 0$ .

Como casos particulares do modelo APARCH( $r, s$ ) tem-se: o modelo ARCH quando  $\delta = 2$ ,  $\omega_i = 0$ , para  $i = 1, \dots, s$  e  $\zeta_j = 0$ , para  $j = 1, \dots, r$ ; e o modelo GARCH quando  $\delta = 2$  e  $\omega_i = 0$ , para  $i = 1, \dots, s$ .

Sabe-se que os retornos possuem uma autocorrelação menor do que a existente entre os retornos em valores absolutos. Assim, destaca-se para o modelo APARCH que, além de utilizar valores absolutos, ao contrário de outros modelos, como o GARCH, o parâmetro  $\delta$  é estimado a partir dos dados, possibilitando um melhor ajuste. Tem-se também que este modelo permite avaliar a diferença entre os efeitos de retornos positivos e negativos na volatilidade.

Assim como para o modelo GARCH, é possível combinar os modelos ARMA e APARCH, resultando no modelo denominado ARMA-APARCH, apresentado a seguir.

**Definição 2.10.** Um processo  $\{Z_t, t \in \mathbb{Z}\}$  segue um modelo ARMA-APARCH( $p, q, r, s$ ),  $p, q, r, s \in \mathbb{Z}$  se:

$$\Psi(B) Z_t = \eta + \Theta(B) X_t \quad (2.11)$$

onde  $X_t$  e  $h_t$  satisfazem as equações (2.9) e (2.10),  $\Psi(B) = 1 - \sum_{i=1}^p \psi_i B^i$ ,  $\Theta(B) = 1 + \sum_{i=1}^q \theta_i B^i$  e  $B$  é o operador de defasagem.



## 3 Aplicações

Para realizar a comparação entre os modelos apresentados no capítulo anterior e avaliar o emprego da distribuição  $\alpha$ -estável nas inovação serão utilizados dois bancos de dados: o primeiro referente à Bovespa, abrangendo assim duas áreas distintas da aplicação de séries temporais.

Todos os resultado e gráficos que serão apresentados neste capítulo foram obtidos com o auxílio dos pacotes *ggplot2*<sup>1</sup>, *stabledist*<sup>2</sup>, *fGarch*<sup>3</sup>, *fBasics*<sup>4</sup> e *GEVStableGarch*<sup>5</sup> do *software R*<sup>6</sup>.

### 3.1 Velocidade do vento em Brasília

Primeiramente aplicou-se os modelos apresentados a informações referentes à velocidade do vento em Brasília. Os dados são da estação *Brasília - A001* e correspondem ao período entre 01 de junho de 2017 e 31 de março de 2018. Todas as informações foram obtidas no site do Instituto Nacional de Meteorologia (INMET) (2018).

O banco contém 7.245 observações relativas a velocidade do vento medida em metros por segundo (m/s). A tabela a seguir apresenta algumas medidas resumo referentes à velocidade, as quais podem ser melhor visualizadas por meio do gráfico de linhas e do histograma abaixo.

Tabela 3.1 – Medidas resumo da velocidade do vento (m/s)

Mínimo	0,1000
Máximo	9,1000
Média	2,5050
Variância	1,4865
Desvio padrão	1,2192

<sup>1</sup> Wickham (2009)

<sup>2</sup> Wuertz, Maechler e members. (2016)

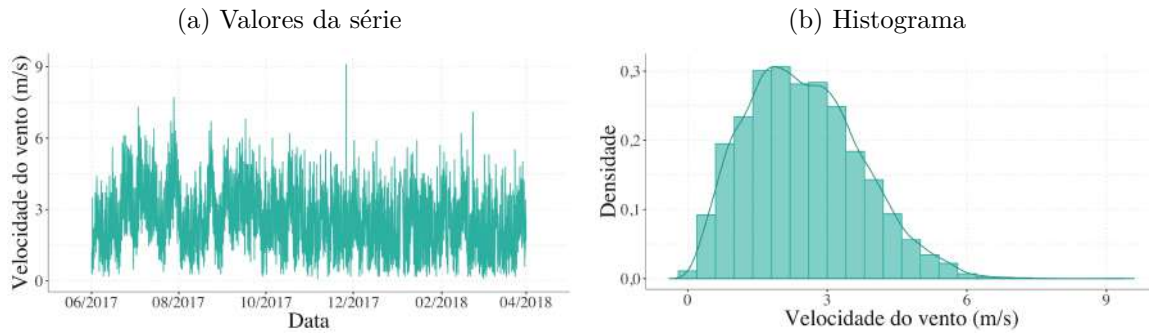
<sup>3</sup> Wuertz et al. (2017)

<sup>4</sup> Wuertz, Setz e Chalabi (2017)

<sup>5</sup> Sousa, Otiniano e Lopes (2017)

<sup>6</sup> R Core Team (2017)

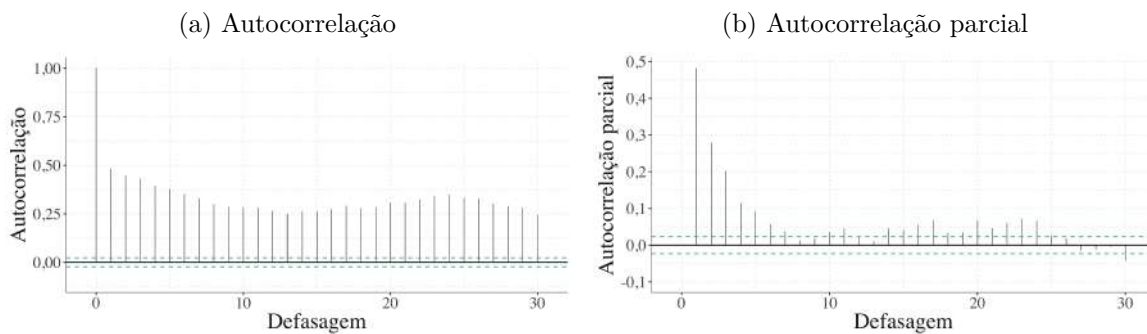
Figura 3.1 – Velocidade do vento



Na Figura 3.1a é possível perceber que a velocidade do vento se comporta de maneira muito similar durante todo o período de estudo. Já no histograma, Figura 3.1b, é possível perceber uma pequena assimetria na distribuição, causada por alguns valores maiores da velocidade do vento.

Com o objetivo de compreender a estrutura de dependência entre as velocidades construiu-se, também, os gráficos da função de autocorrelação e da função de autocorrelação parcial.

Figura 3.2 – Estrutura de dependência da velocidade do vento



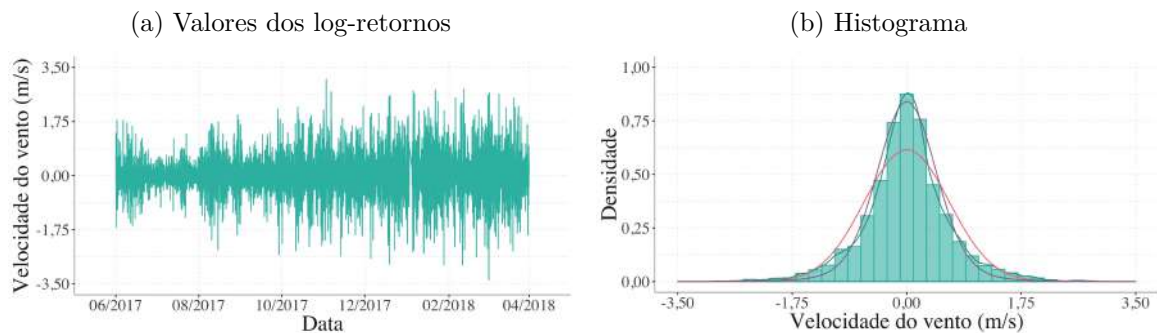
É possível observar no gráfico da autocorrelação, Figura 3.2a, que a dependência entre os dados continua elevada mesmo após 30 defasagens. Dessa forma, com o objetivo de obter um melhor ajuste para os modelos propostos, optou-se por trabalhar com o log-retorno das velocidades do vento, resultando, portanto, em um banco de dados com 7.244 observações.

Para a avaliação dos dados com a transformação log-retorno construiu-se os gráficos e a tabela a seguir.

Tabela 3.2 – Medidas resumo do log-retorno da velocidade do vento

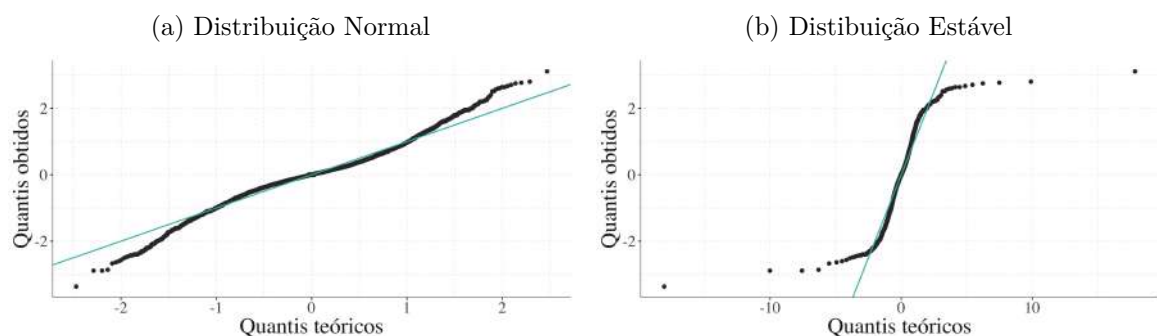
Mínimo	-3,3673
Máximo	3,1135
Média	0,0001
Variância	0,4199
Desvio padrão	0,6480

Figura 3.3 – Log-retorno da velocidade do vento



No histograma, Figura 3.3b, as linhas verde, rosa e roxa representam, respectivamente, a densidade dos dados, da distribuição Normal, com média e variância apresentadas na Tabela 3.2, e a da distribuição Estável com  $\alpha = 1,80$ ,  $\beta = -0,01$ ,  $\sigma = 0,34$  e  $\mu = 0,00$ . Os gráficos de quantis seguintes também utilizaram as distribuições Normal e Estável com os parâmetros descritos.

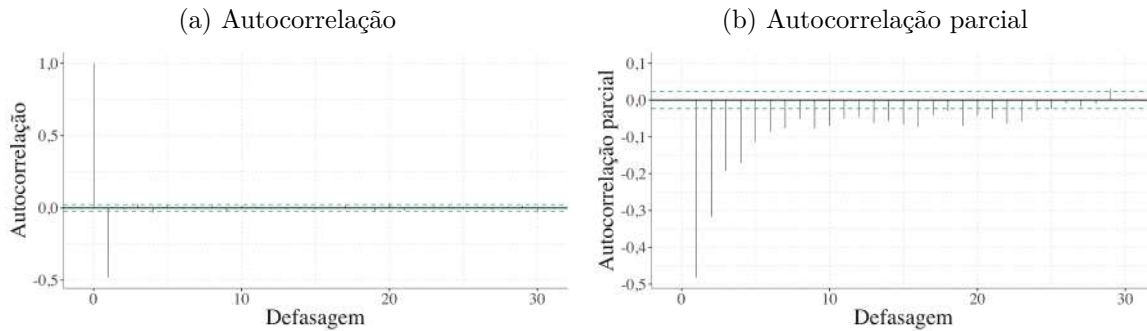
Figura 3.4 – Gráficos de quantis do log-retorno da velocidade do vento



Com o auxílio do histograma e dos gráficos de quantis, tem-se que a distribuição Estável parece se adequar melhor aos dados, uma vez consegue capturar a forma leptocúrtica dos dados de maneira mais eficiente do que a Normal. Além da visualização gráfica, foi realizado o teste de Kolmogorov-Smirnov com as duas distribuições. Para a Normal obteve-se uma estatística do teste igual a 0,0623 e para a Estável obteve-se 0,0390. Apesar de, em ambos os casos, o teste rejeitar a hipótese de que os dados seguem as respectivas distribuições, pela estatística do teste é fácil ver que o ajuste da Estável é melhor.

Os gráficos a seguir apresentam os valores da função de autocorrelação e da função de autocorrelação parcial para os dados com a transformação log-retorno e serão utilizados para avaliar a estrutura de dependência entre os mesmos.

Figura 3.5 – Autocorrelação do log-retorno da velocidade do vento



Os gráficos demonstram que existe uma dependência entre os valores, ou seja, utilizar a estrutura ARMA para obter um melhor ajuste pode ser indicado. Na Figura 3.5a é possível observar que a função de autocorrelação apresenta a primeira defasagem fora do intervalo de confiança e, na Figura 3.5b, tem-se que a função de autocorrelação parcial apresenta um decaimento. Assim, a estrutura indicada do modelo ARMA é um modelo de médias móveis puro de ordem 1.

Para fins de comparação, optou-se por ajustar também os modelos GARCH e APARCH sem a estrutura do modelo ARMA indicada. Assim, o primeiro modelo ajustado foi o GARCH(1, 1) com inovações gaussianas e, posteriormente, com inovações estáveis dado por

$$(X_t - \eta) = h_t \varepsilon_t$$

$$\text{com } h_t^2 = v_0 + v_1 X_{t-1}^2 + \zeta_1 h_{t-1}^2 ,$$

$\varepsilon_t$  uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com média zero e variância um (distribuição  $\alpha$ -estável ou Normal),  $v_0 > 0$ ,  $v_1 > 0$  e  $\zeta_1 > 0$ . As estimativas obtidas foram:

Tabela 3.3 – Estimativas para o modelo GARCH(1, 1)

Parâmetro	Distribuição Normal		Distribuição Estável	
	Estimativa	Desvio padrão	Estimativa	Desvio padrão
$\eta$	-0,0053	0,0052	-0,0106	0,0047
$v_0$	0,0047	0,0010	0,0142	0,0026
$v_1$	0,1609	0,0148	0,1496	0,0121
$\zeta_1$	0,8417	0,0138	0,7957	0,0188

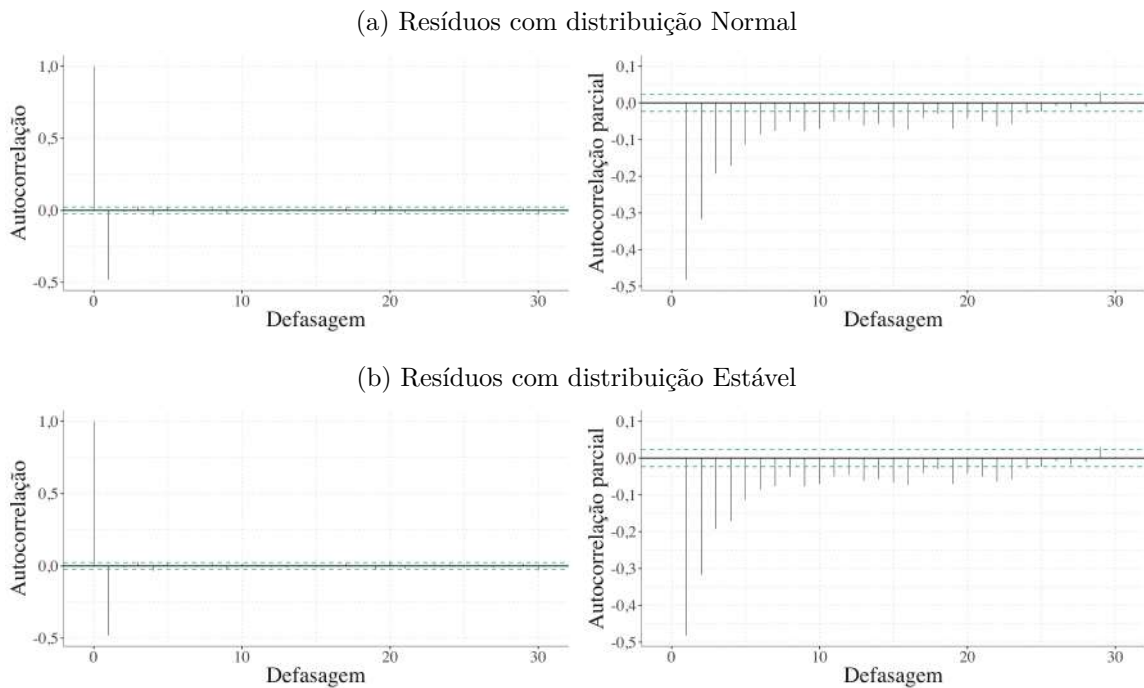


Além dos resultados apresentados na Tabela 3.3, para o modelo que supõe distribuição Estável para os resíduos, as estimativas para os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  foram, respectivamente, 1,91 e  $-0,60$  enquanto os parâmetros  $\sigma$  e  $\mu$  estavam fixados em 1 e 0. Com os valores apresentados na Tabela 3.3 tem-se que apenas o parâmetro  $\eta$  não é estatisticamente diferente de zero considerando um intervalo de três desvios-padrão.

Pelos resultados obtidos para o modelo GARCH(1, 1), observa-se que as estimativas dos parâmetros  $\zeta_1$  e  $\nu_1$  indicam que, tanto no modelo com inovações gaussianas quanto no modelo com inovações estáveis, a influência de valores passados na volatilidade é menor do que a influência de volatilidades anteriores na volatilidade atual.

Para avaliar a adequabilidade do modelo construiu-se os gráficos com as funções de autocorrelação e de autocorrelação parcial dos resíduos do modelo GARCH(1, 1) com inovações com distribuição Normal e  $\alpha$ -estável, apresentados a seguir.

Figura 3.6 – Autocorrelação para os resíduos do modelo GARCH(1,1)



Utilizando os gráficos apresentados na Figura 3.6 é possível perceber que a estrutura de autocorrelação dos dados se manteve nos resíduos, tanto no modelo com inovações gaussianas quanto no modelo com inovações estáveis, violando a hipótese de independência e ressaltando a necessidade de ajustar um modelo de médias móveis.

Assim, ajustou-se o modelo MA-GARCH(1, 1, 1), também supondo inovações gaussianas e estáveis, dado por:

$$Z_t = \eta + X_t + \theta_1 X_{t-1} ,$$

$$X_t = h_t \varepsilon_t ,$$

$$h_t^2 = v_0 + v_1 X_{t-1}^2 + \zeta_1 h_{t-1}^2$$

sendo  $\varepsilon_t$  uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com média zero e variância um (distribuição  $\alpha$ -estável ou Normal),  $v_0 > 0$ ,  $v_1 > 0$  e  $\zeta_1 > 0$ . A tabela a seguir contém as estimativas obtidas para esse modelo.

Tabela 3.4 – Estimativas para o modelo MA-GARCH(1, 1, 1)

Parâmetro	Distribuição Normal		Distribuição Estável	
	Estimativa	Desvio padrão	Estimativa	Desvio padrão
$\eta$	-0,0027	0,0011	-0,0041	0,0010
$\theta_1$	-0,7700	0,0123	-0,8053	0,0127
$v_0$	0,0031	0,0006	0,0076	0,0012
$v_1$	0,0802	0,0068	0,0702	0,0052
$\zeta_1$	0,9105	0,0073	0,8889	0,0087

Os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  para as inovações com distribuição Estável foram estimados como 1,81 e  $-0,98$  enquanto  $\sigma$  e  $\mu$  estavam fixados em 1 e 0. Na Tabela 3.4 tem-se que todas as estimativas obtidas para os coeficientes de ambos os modelos mostraram-se significantes quando considerando um intervalo de dois desvios-padrão. Observando os resultados apresentados nota-se também que as estimativas dos parâmetros são semelhantes entre o modelo com distribuição Estável e o com distribuição Normal.

Para avaliar a hipótese de independência entre as inovações construiu-se os gráficos a seguir.

Figura 3.7 – Resíduos do modelo MA-GARCH(1, 1, 1) com inovações gaussianas

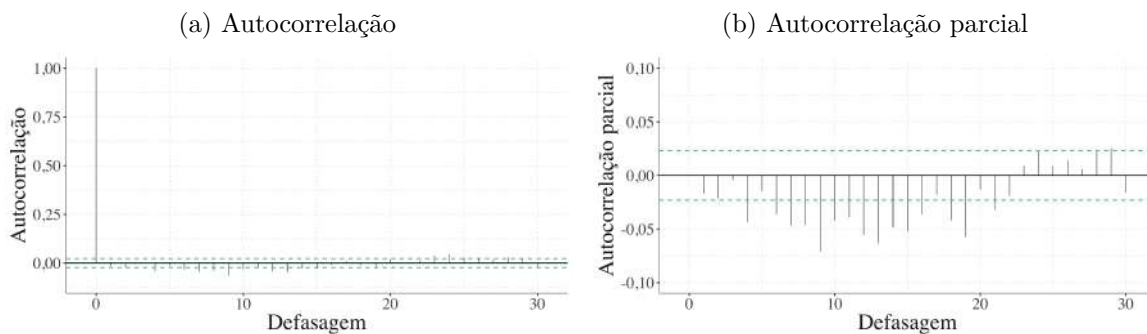
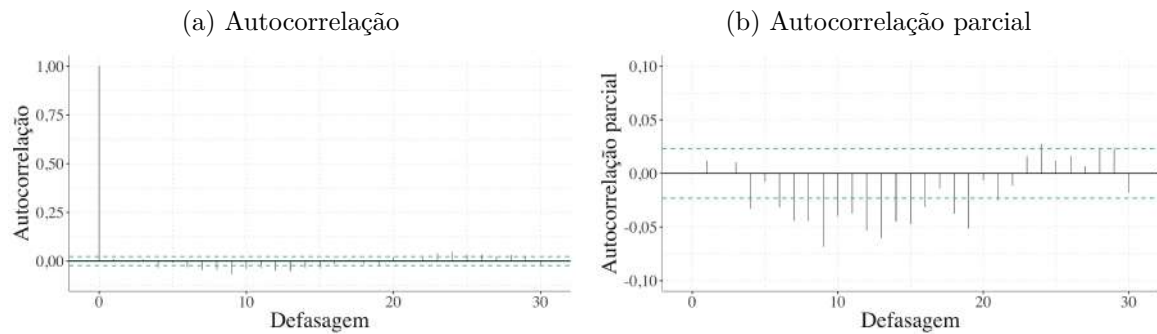


Figura 3.8 – Resíduos do modelo MA-GARCH(1, 1, 1) com inovações estáveis



Nas figuras 3.7 e 3.8 é possível perceber que os valores obtidos para a função de autocorrelação e para a função de autocorrelação parcial, tanto no modelo com inovações gaussianas quanto no modelo com inovações estáveis, estão dentro ou muito próximos do intervalo de confiança, ou seja, estes modelos adequam-se melhor à hipótese de independência entre os resíduos do que o modelo GARCH(1, 1).

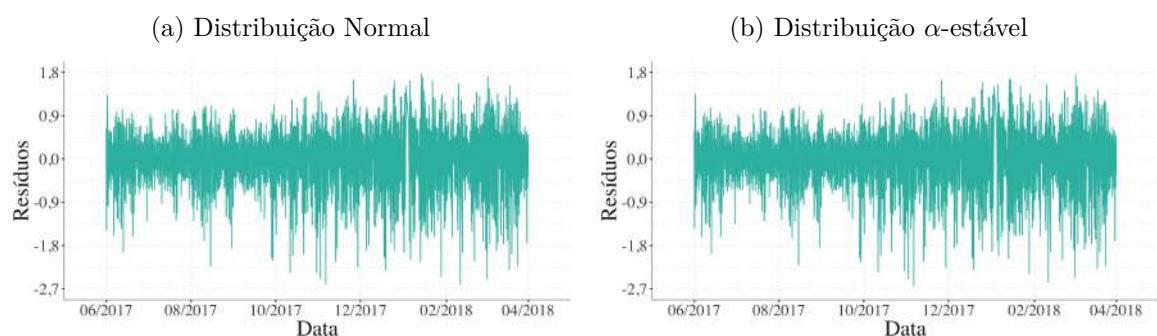
Apesar de, como relatado anteriormente, algumas defasagens não estarem dentro do intervalo de confiança, optou-se por não ajustar uma média móvel de ordem mais elevada visando a parcimonialidade do modelo.

Para o ajuste dos modelos apresentados acima utilizou-se a suposição de que as inovações, além de independentes, apresentam distribuição Normal ou Estável. Para avaliar se essa suposição foi satisfeita nos modelos MA-GARCH(1, 1, 1), construiu-se a tabela e os gráficos apresentados a seguir.

Tabela 3.5 – Medidas resumo das inovações dos modelos MA-GARCH(1, 1, 1)

Medidas	Distribuição	
	Normal	Estável
Média	0,0122	0,0215
Variância	0,2594	0,2578
Desvio padrão	0,5093	0,5077

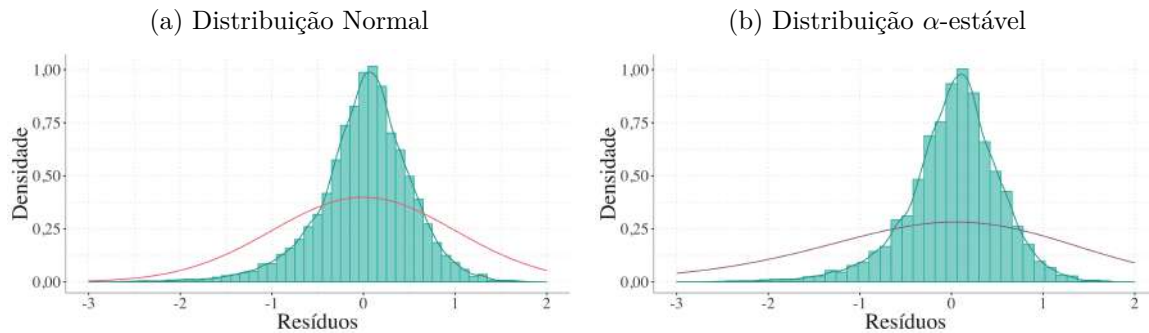
Figura 3.9 – Resíduos do modelo MA-GARCH(1, 1, 1)



Nos gráficos da Figura 3.9 e na Tabela 3.5 é possível perceber que as inovações do modelo que utiliza a distribuição Normal e as do modelo com distribuição  $\alpha$ -estável apresentam comportamento semelhante.

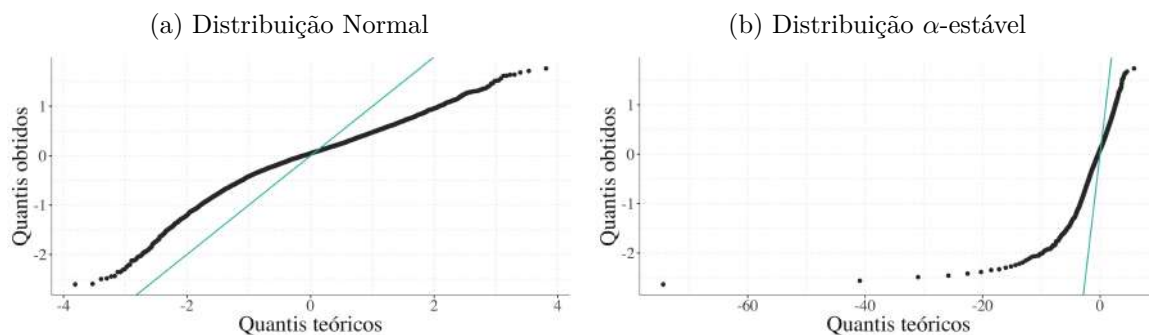
Os histogramas e os gráficos de quantis apresentados a seguir buscam auxiliar na avaliação do ajuste das distribuições supostas.

Figura 3.10 – Histograma dos resíduos do modelo MA-GARCH(1, 1, 1)



Nos histogramas da Figura 3.10, a linha verde representa a densidade dos resíduos do modelo em questão enquanto a linha rosa é a densidade da distribuição Normal com média zero e variância um e a linha roxa é a da Estável com  $\alpha = 1,81$ ,  $\beta = -0,98$ ,  $\sigma = 1$  e  $\mu = 0$ . Os menos parâmetros foram utilizados para construir os gráficos de quantis apresentados a seguir.

Figura 3.11 – Gráfico de quantis dos resíduos do modelo MA-GARCH(1, 1, 1)



Além de construir os gráficos apresentados nas figuras 3.10 e 3.11, a fim de avaliar o ajuste das distribuições supostas, utilizou-se o teste de Kolmogorov-Smirnov. Para a distribuição Normal com média zero e variância um a estatística do teste foi 0,1784 e para a distribuição Estável com  $\sigma = 1$ ,  $\mu = 0$  e os parâmetros estimados  $\alpha = 1,81$  e  $\beta = -0,98$  a estatística do teste foi 0,2677. Em ambos os casos o teste rejeitou a hipótese de que os erros vieram das distribuições supostas.

Assim como para o modelo GARCH, para o APARCH, será primeiramente ajustado o modelo APARCH e, em seguida, o MA-APARCH.

Para o modelo APARCH(1,1) os parâmetros obtidos, tanto quando as inovações foram supostas normais quanto estáveis, estão apresentados na tabela a seguir e devem ser interpretados como:

$$X_t = h_t \varepsilon_t$$

$$h_t^\delta = v_0 + v_1 (X_{t-1} - \omega_1 |X_{t-1}|)^\delta + \zeta_1 h_{t-1}^\delta$$

com  $\varepsilon_t$  uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com média zero e variância um,  $v_0 > 0$ ,  $v_1 > 0$ ,  $\zeta_1 > 0$ ,  $|\omega_1| < 1$  e  $\delta > 0$ .

Tabela 3.6 – Estimativas para o modelo APARCH(1,1)

Parâmetro	Distribuição Normal		Distribuição Estável	
	Estimativa	Desvio padrão	Estimativa	Desvio padrão
$\eta$	-0,0485	0,0300	-0,0982	41,21
$v_0$	0,0120	0,0095	0,0323	23,72
$v_1$	0,1234	0,0569	0,1607	60,37
$\zeta_1$	0,8887	0,0737	0,7620	111,79
$\omega_1$	1,0000	0,4401	1,0000	50,09
$\delta$	1,0797	1,9053	1,0000	241,81

Para o caso do modelo como inovações  $\alpha$ -estáveis foram estimados também os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  da distribuição e suas estimativas foram, respectivamente, 1,76 e  $-0,98$ . Observa-se dos resultados obtidos que, para o modelo que supõe distribuição Estável pra os resíduos, nenhum coeficiente é estatisticamente significativo, e, para o modelo com a distribuição Normal, apenas o  $\zeta_1$  é.

Os gráficos a seguir apresentam a autocorrelação e a autocorrelação parcial dos resíduos de ambos os modelos para a avaliação da suposição de independência entre os erros.

Figura 3.12 – Autocorrelação para o modelo APARCH(1,1) com inovações gaussianas

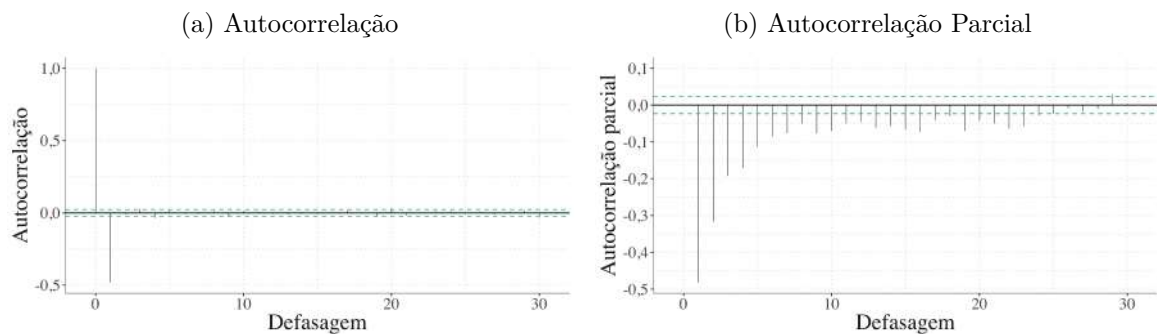
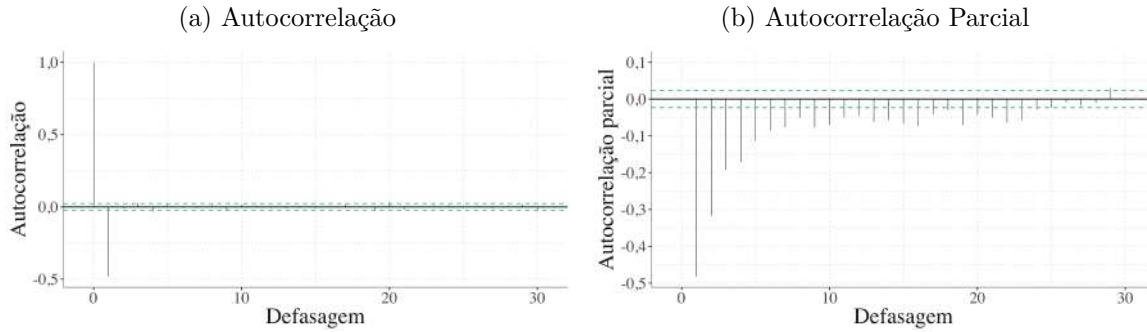


Figura 3.13 – Autocorrelação para o modelo APARCH(1, 1) com inovações estáveis



Nos gráficos apresentados é possível perceber que, assim como no modelo GARCH(1, 1), os erros mantiveram a estrutura de autocorrelação dos dados, indicando que a hipótese de independência entre os resíduos está sendo violada.

Assim, ajustou-se o modelo MA-APARCH(1, 1, 1) cujas estimativas obtidas para os parâmetros serão apresentadas na tabela a seguir e devem ser interpretadas como:

$$Z_t = \eta + X_t + \theta_1 X_{t-1}$$

$$X_t = h_t \varepsilon_t, \quad h_t^\delta = v_0 + v_1 (X_{t-1} - \omega_1 |X_{t-1}|)^\delta + \zeta_1 h_{t-1}^\delta$$

e  $\varepsilon_t$  uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com média zero e variância um,  $v_0 > 0$ ,  $v_1 > 0$ ,  $\zeta_1 > 0$ ,  $|\omega_1| < 1$  e  $\delta > 0$ .

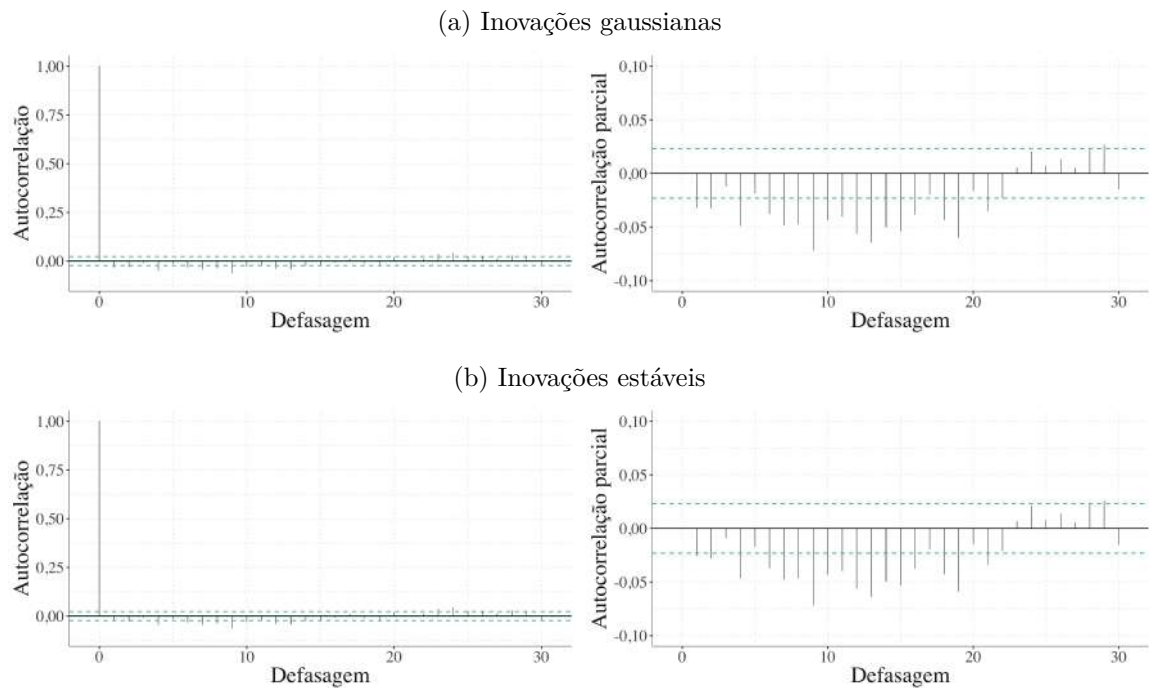
Tabela 3.7 – Estimativas para o modelo MA-APARCH(1, 1, 1)

Parâmetro	Distribuição Normal		Distribuição Estável	
	Estimativa	Desvio Padrão	Estimativa	Desvio Padrão
$\eta$	-0,0061	0,0013	-0,0110	0,0242
$\theta_1$	-0,7508	0,0098	-0,7592	0,5393
$v_0$	0,0054	0,0010	0,0050	0,0425
$v_1$	0,0614	0,0078	0,0441	0,0843
$\zeta_1$	0,9432	0,0068	0,9349	0,3863
$\omega_1$	0,8246	0,1487	1,0000	7,8367
$\delta$	1,0211	0,0800	1,0000	2,7785

Além disso, para o modelo com inovações estáveis, os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  estimados foram 1,76 e  $-0,99$ , respectivamente. Nota-se na Tabela 3.7 que as estimativas dos parâmetros para o modelo com inovações estáveis não são estatisticamente diferentes de zero quando considerado um intervalo de três desvios-padrão.

Para avaliar a suposição de independência entre os resíduos do modelo MA-APARCH(1, 1, 1) construiu-se os gráficos apresentados a seguir.

Figura 3.14 – Autocorrelação dos resíduos do modelo MA-APARCH(1, 1, 1)



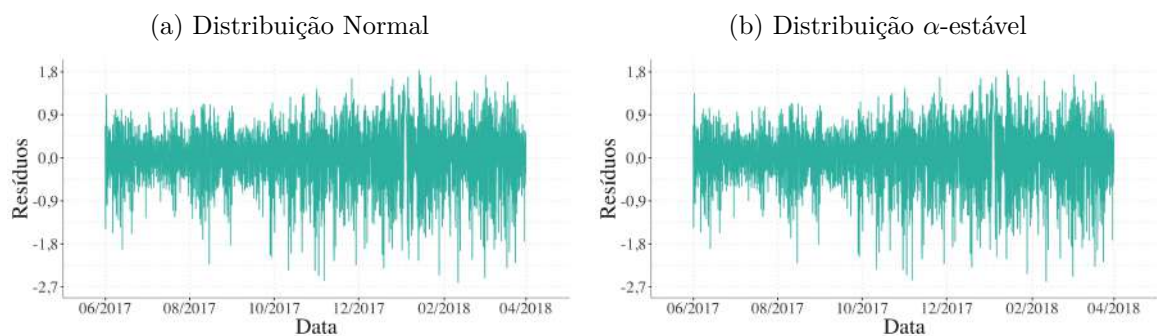
Utilizando os gráficos apresentados na Figura 3.14 é possível perceber que, devido à introdução da estrutura do modelo de médias móveis, os resíduos se adequaram melhor à hipótese de independência do que para o modelo APARCH.

A segunda hipótese, referente à distribuição dos resíduos, será avaliada com o auxílio da tabela e dos gráficos apresentados a seguir.

Tabela 3.8 – Medidas resumo das inovações dos modelos MA-APARCH(1, 1, 1)

Medidas	Distribuição	
	Normal	Estável
Média	0,0249	0,0459
Variância	0,2605	0,2600
Desvio padrão	0,5104	0,5099

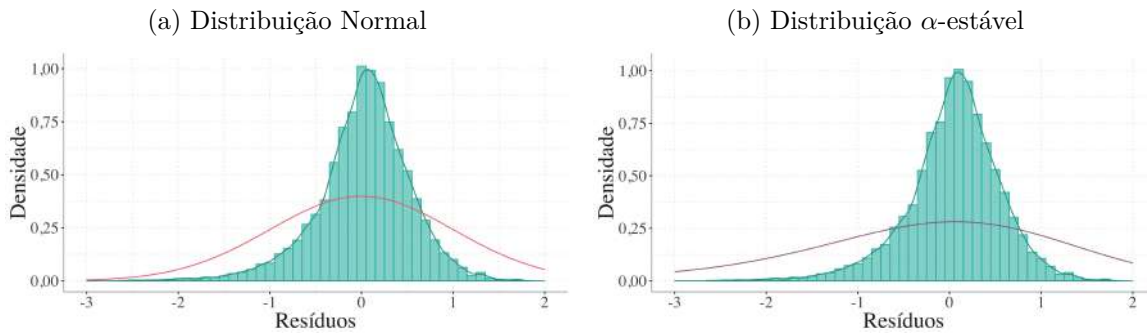
Figura 3.15 – Resíduos do modelo MA-APARCH(1, 1, 1)





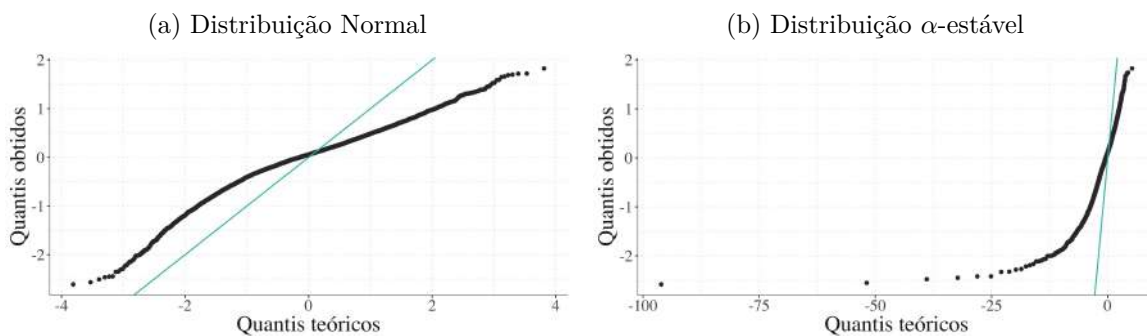
Com as informações apresentadas na Tabela 3.8 e observando os gráficos da Figura 3.15 é possível perceber que os resíduos do modelo que supõe distribuição Normal apresentaram média mais próxima de zero e desvio-padrão semelhante ao do modelo que utiliza a distribuição Estável.

Figura 3.16 – Histograma dos resíduos do modelo MA-APARCH(1, 1, 1)



Nos histogramas, a linha verde representa a densidade dos dados enquanto a linha rosa é a densidade da distribuição Normal com média um e variância zero e a linha roxa é a da distribuição Estável com  $\alpha = 1,76$ ,  $\beta = -0,99$ ,  $\sigma = 1$  e  $\mu = 0$ . Os gráficos de quantis a seguir foram construídos utilizando os mesmos valores para os parâmetros das distribuições Normal e Estável e também podem ser utilizados para avaliar a adequabilidade dos resíduos às distribuições que foram supostas.

Figura 3.17 – Gráfico de quantis dos resíduos do modelo MA-APARCH(1, 1, 1)



Além dos recursos gráficos, realizou-se o teste de Kolmogorv-Smirnov para a avaliação da adequabilidade das distribuições. As estatísticas do teste obtidas foram 0,1827 para a distribuição Normal e 0,2805 para a distribuição Estável, ambas as distribuições com os parâmetros utilizados nos gráficos. Os testes rejeitaram a hipótese de que os resíduos seguem as respectivas distribuições.



As tabelas a seguir apresentam algumas medidas que podem ser utilizadas para a avaliação dos modelos.

Tabela 3.9 – Comparação entre os modelos sem a estrutura de médias móveis

Medidas	GARCH(1, 1)		APARCH(1, 1)	
	Normal	Estável	Normal	Estável
Log-verossimilhança	6.081,56	6.008,05	4.810,23	4.555,14
AIC	12.171,14	12.028,09	9.630,46	9.124,27
BIC	12.198,69	12.069,42	9.664,90	9.172,49
AICc	12.173,15	12.030,10	9.632,48	9.126,29

Tabela 3.10 – Comparação entre os modelos com a estrutura de médias móveis

Medidas	MA-GARCH(1, 1, 1)		MA-APARCH(1, 1, 1)	
	Normal	Estável	Normal	Estável
Log-verossimilhança	5.970,47	5.735,81	4.770,00	4.452,70
AIC	11.952,93	11.487,62	9.554,01	8.923,39
BIC	11.994,26	11.542,72	9.602,22	8.985,39
AICc	11.954,95	11.489,65	9.556,03	8.925,42

Nas tabelas 3.9 e 3.10 nota-se que os valores obtidos são, em todos os modelos e para todas as medidas, menores, ou seja, melhores, com inovações estáveis do que com inovações gaussianas. Nota-se também que os modelos com a estrutura de médias móveis possuem um melhor ajuste do que os mesmos sem essa estrutura, o que era esperado pelos resultados apresentados anteriormente.

## 3.2 Índice Bovespa

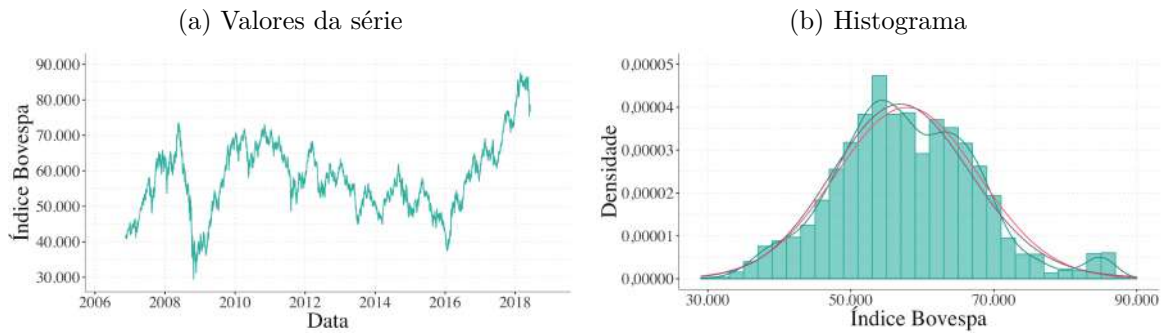
A segunda aplicação consiste em 2.895 observações referentes à cotação do Índice Bovespa (IBOV) entre 16 de novembro de 2006 e 30 de abril de 2018.

A tabela e os gráficos que serão apresentados a seguir permitem uma melhor compreensão dos dados.

Tabela 3.11 – Medidas resumo para o Índice Bovespa

Mínimo	29.435
Máximo	87.653
Média	57.859
Variância	99.639.405
Desvio padrão	9.981,95

Figura 3.18 – Índice Bovespa

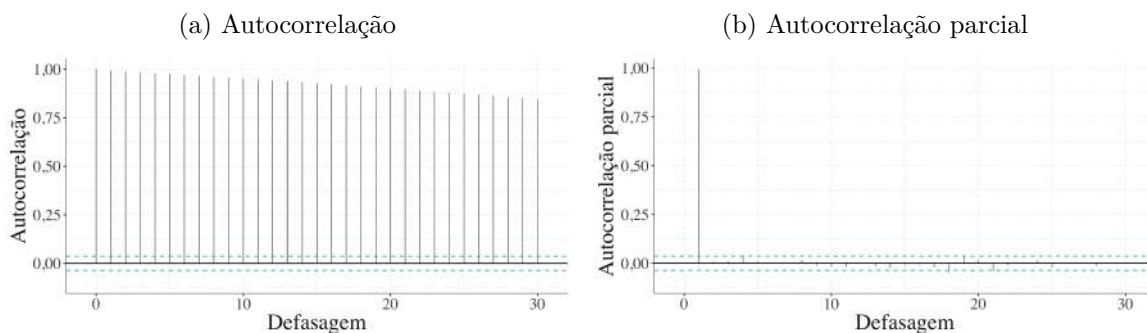


A linha verde no histograma, Figura 3.18b, indica a densidade dos dados enquanto a linha rosa representa a densidade de uma distribuição Normal com média e variância iguais às apresentadas na Tabela 3.11 e a linha roxa representa a densidade de uma distribuição Estável com parâmetros  $\alpha = 1,94$ ,  $\beta = 0,95$ ,  $\sigma = 6.930,86$  e  $\mu = 56.994,05$ .

É possível observar que a distribuição Normal e a distribuição Estável se comportam de maneira muito semelhante aos valores obtidos para os parâmetros. Isso ocorre pois o  $\alpha$  ajustado da distribuição Estável possui um valor próximo de 2 onde, como descrito no Capítulo 1, assume a distribuição Normal. Nota-se também que, apesar do  $\beta$  da distribuição  $\alpha$ -estável ajustado indicar grande assimetria, como o valor de  $\alpha$  é próximo de 2, a distribuição não é tão afetada.

As figuras a seguir apresentam os valores obtidos da função de autocorrelação e da função de autocorrelação parcial para esse conjunto de dados.

Figura 3.19 – Estrutura de dependência do Índice Bovespa

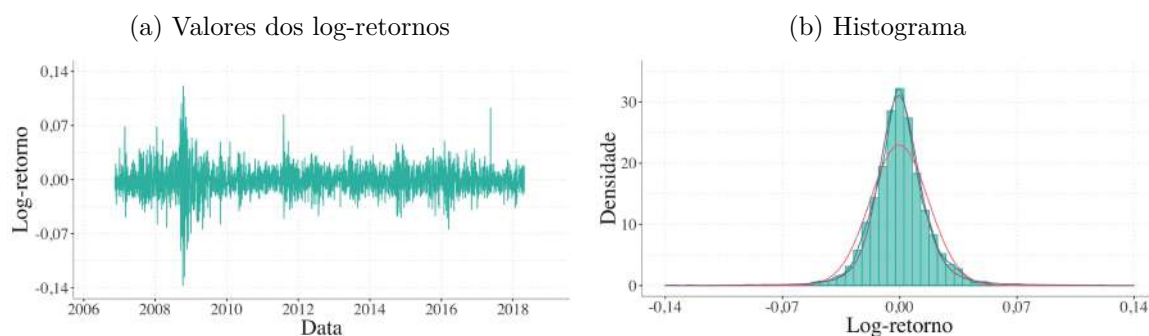


Na Figura 3.19a tem-se que o decaimento da função de autocorrelação ocorre de forma muito lenta, o que indica que o processo não é estacionário. Dessa forma, os modelos serão ajustados ao log-retorno dos dados. Os resultados dessa transformação podem ser observados nos gráficos e na tabela apresentados a seguir.

Tabela 3.12 – Medidas resumo do log-retorno do Índice Bovespa

Mínimo	-0,1368
Máximo	0,1210
Média	-0,0003
Variância	0,0003
Desvio padrão	0,0174

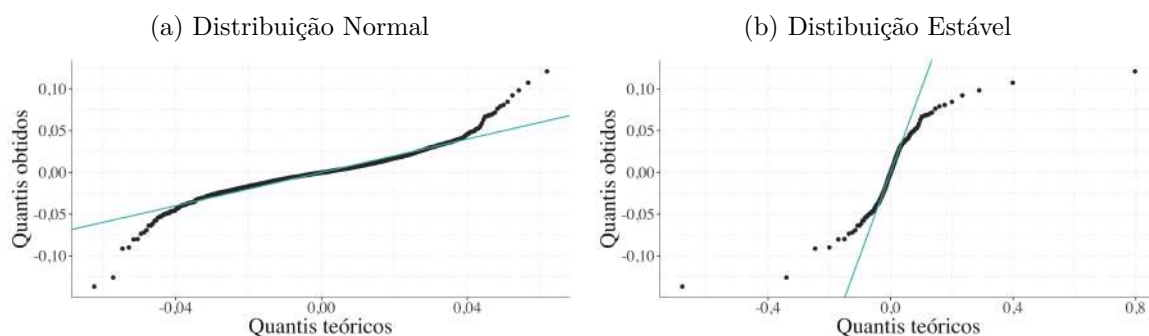
Figura 3.20 – Log-retorno do Índice Bovespa



No hitograma, Figura 3.20b, novamente as linhas verde, rosa e roxa representam respectivamente a densidade dos dados, a densidade da distribuição Normal com média e variância iguais às apresentadas na Tabela 3.12 e a densidade da distribuição Estável com  $\alpha = 1,5750$ ,  $\beta = 0,1250$ ,  $\sigma = 0,0092$  e  $\mu = -0,0006$ . Neste histograma nota-se que a distribuição estável parece se ajustar melhor aos dados pois estes possuem uma distribuição mais leptocúrtica do que a distribuição Normal consegue capturar.

Para auxiliar a visualização do ajuste da distribuição Normal e da distribuição  $\alpha$ -estável nos dados construiu-se os gráficos de quantis apresentados abaixo. Os gráficos foram construídos utilizando os mesmos valores descritos para os parâmetros do histograma.

Figura 3.21 – Gráficos de quantis do log-retorno do Índice Bovespa

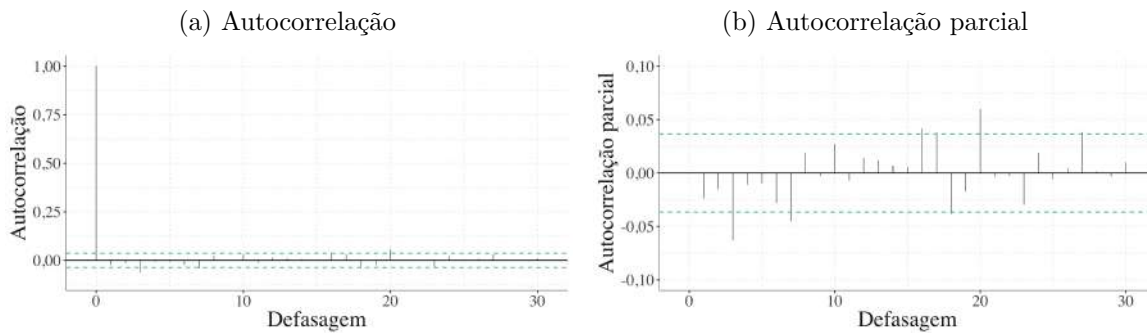


Nota-se nos gráficos da Figura 3.21 que ambas as distribuições não possuem um bom ajuste para as caudas. Entretanto, vale ressaltar que enquanto a distribuição Normal

não consegue capturar as caudas por subestimar seu peso, a distribuição Estável possui o problema oposto, uma vez que superestima o peso das mesmas.

Para avaliar a estacionariedade, construiu-se os gráficos das funções de autocorrelação e de autocorrelação parcial do log-retorno dos dados, apresentados a seguir.

Figura 3.22 – Autocorrelação do log-retorno do Índice Bovespa



Com os resultados apresentados na Figura 3.22 é possível perceber que, ao contrário dos dados referentes à velocidade do vento em Brasília, apresentados na seção anterior, não parece ser necessário ajustar uma estrutura autorregressiva nem de médias móveis ao log-retorno do Índice Bovespa.

O primeiro modelo ajustado foi o modelo GARCH(1, 1), dado por

$$(X_t - \eta) = h_t \varepsilon_t$$

$$\text{com } h_t^2 = v_0 + v_1 X_{t-1}^2 + \zeta_1 h_{t-1}^2$$

e  $\varepsilon_t$  uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com média zero e variância um,  $v_0 > 0$ ,  $v_1 > 0$  e  $\zeta_1 > 0$ .

A tabela a seguir apresenta as estimativas dos parâmetros e seus respectivos desvios-padrão para este modelo.

Tabela 3.13 – Estimativas para o modelo GARCH(1, 1)

Parâmetro	Distribuição Normal		Distribuição Estável	
	Estimativa	Desvio padrão	Estimativa	Desvio padrão
$\eta$	-0,0005	0,0206	-0,0007	0,0013
$v_0$	0,0000	0,0001	0,0002	0,0002
$v_1$	0,0886	0,9126	0,0567	0,0119
$\zeta_1$	0,8861	1,3379	0,9186	0,0202

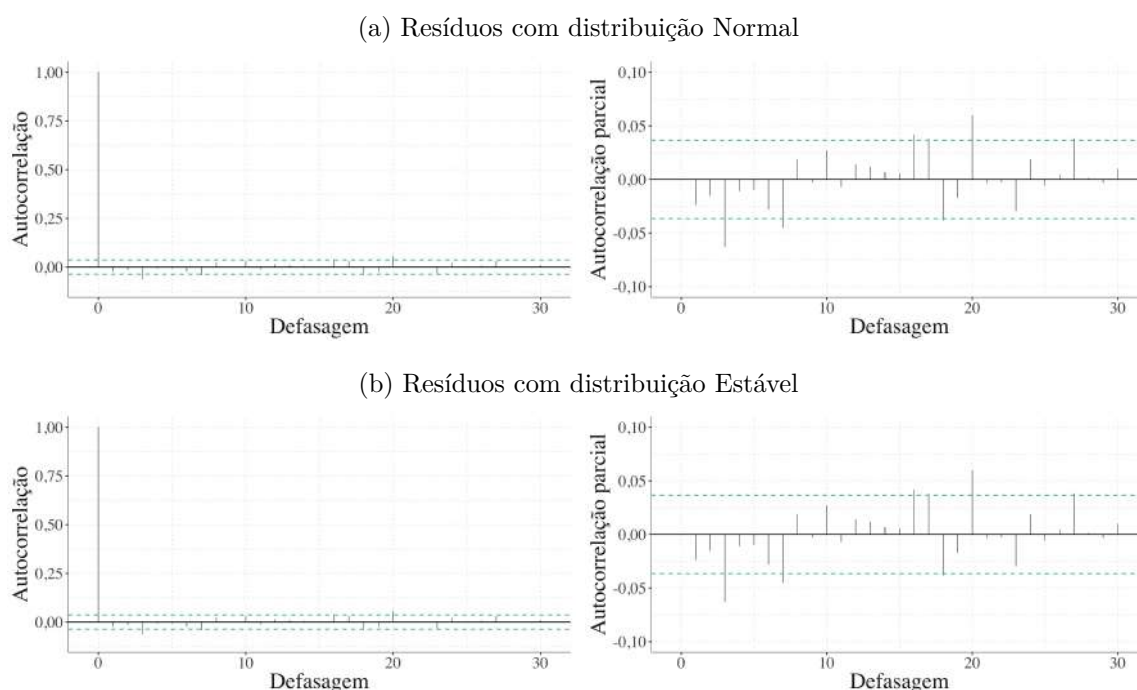
Além dos resultados apresentados, para o modelo com inovações estáveis obteve-se  $\alpha = 1,9292$  e  $\beta = -0,3565$ , entretanto, os desvios-padrão para esses parâmetros foram

respectivamente 0,1060 e 0,4594, indicando que, estatisticamente, essa distribuição não é diferente de uma distribuição Normal com média zero e variância um.

Nota-se na tabela 3.13 que, para o modelo com inovações gaussianas, nenhum coeficiente é significativamente diferente de zero enquanto que, para o modelo com inovações estáveis, apenas os parâmetros  $v_1$  e  $\zeta_1$  são diferentes de zero. As estimativas desses dois parâmetros indicam que a volatilidade condicional é influenciada tanto por valores anteriores do processo quanto por volatilidades anteriores, sendo a influência da volatilidade maior do que a de valores passados.

A fim de avaliar a suposição de independência entre os resíduos, construiu-se os gráficos de autocorrelação apresentados a seguir.

Figura 3.23 – Autocorrelação para os resíduos do modelo GARCH(1,1)

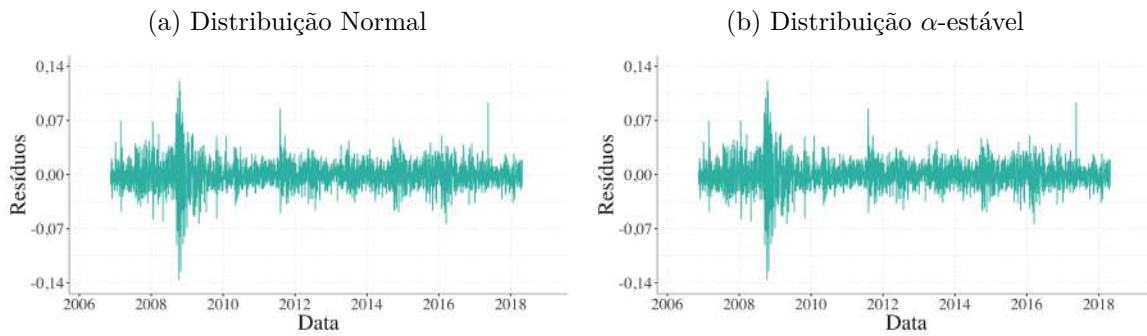


Observa-se que os resíduos mantiveram a estrutura de dependência do log-retorno do Índice Bovespa. Isso ocorre pois optou-se por não ajustar uma estrutura autorregressiva nem de médias móveis aos dados. A tabela e os gráficos apresentados a seguir buscam auxiliar a avaliação da adequabilidade das distribuições supostas.

Tabela 3.14 – Medidas resumo das inovações dos modelos GARCH(1,1)

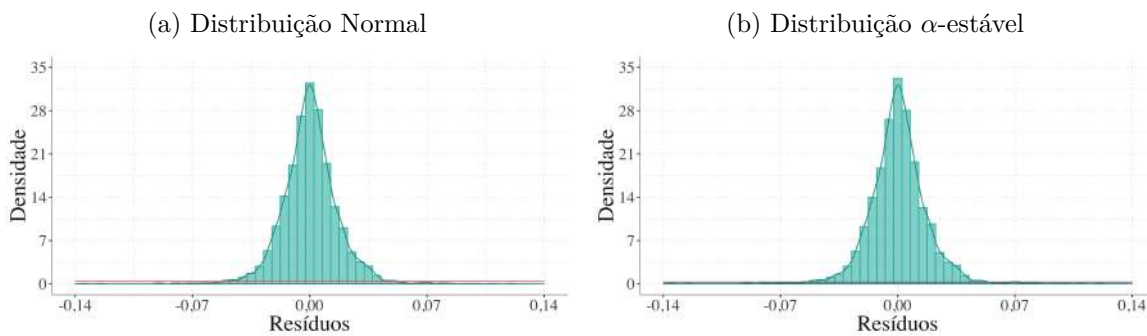
Medidas	Distribuição	
	Normal	Estável
Média	0,0003	0,0004
Variância	0,0003	0,0003
Desvio padrão	0,0174	0,0174

Figura 3.24 – Resíduos do modelo GARCH(1, 1)



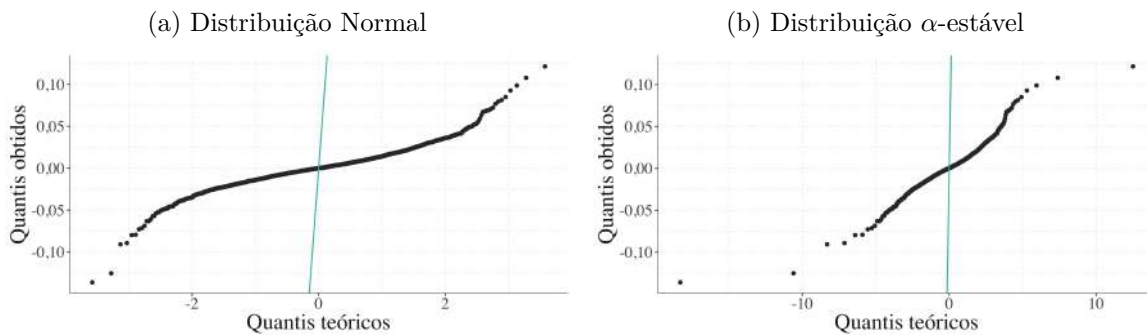
O modelo supõe média zero e variância um na distribuição dos resíduos. Assim, tem-se que a variância obtida tanto na distribuição Normal quanto Estável, é menor do que o modelo supõe. Nos histogramas a seguir é possível visualizar tal informação.

Figura 3.25 – Histograma dos resíduos do modelo GARCH(1, 1)



Nos gráficos apresentados na Figura 3.25 a linha verde representa a densidade dos dados enquanto as linhas rosa e roxa representam a densidade das distribuições Normal, com média zero e variância um, e Estável, com  $\alpha = 1,9292$ ,  $\beta = -0,3565$ ,  $\sigma = 1$  e  $\mu = 0$ . Tais parâmetros também foram utilizados para construir os gráficos de quantis abaixo.

Figura 3.26 – Gráfico de quantis dos resíduos do modelo GARCH(1, 1)



Nas figura 3.26 e 3.25 é possível observar o resultado referente à variância da distribuição dos dados que foi apresentado anteriormente.

A tabela seguinte contém as estimativas para os parâmetros do modelo APARCH(1, 1). Este modelo é dado por:

$$X_t = h_t \varepsilon_t$$

$$h_t^\delta = v_0 + v_1 (X_{t-1} - \omega_1 |X_{t-1}|)^\delta + \zeta_1 h_{t-1}^\delta$$

com  $\varepsilon_t$  uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com média zero e variância um,  $v_0 > 0$ ,  $v_1 > 0$ ,  $\zeta_1 > 0$ ,  $|\omega_1| < 1$  e  $\delta > 0$ .

Tabela 3.15 – Estimativas para o modelo APARCH(1, 1)

Parâmetro	Distribuição Normal		Distribuição Estável	
	Estimativa	Desvio padrão	Estimativa	Desvio padrão
$\eta$	-0,0009	0,0002	-0,0010	0,0003
$v_0$	0,0002	0,0001	0,0001	0,0001
$v_1$	0,0723	0,0111	0,0456	0,0080
$\zeta_1$	0,9320	0,0107	0,9404	0,0120
$\omega_1$	0,6069	0,1137	0,6524	0,2413
$\delta$	1,0693	0,1867	1,0338	0,0806

Com os resultados apresentados, tem-se que, no modelo com inovações gaussianas apenas o  $v_0$  não é significativamente diferente de zero considerando dois desvios-padrão. Já no modelo com inovações estáveis, tem-se novamente que  $v_0$  não é significativo e, quando considerados três desvios-padrão,  $\omega_1$  também não.

Além disso, para o modelo como inovações estáveis estimou-se  $\alpha = 1,9429$  e  $\beta = -0,6519$ . Entretanto, o desvio-padrão de  $\beta$  foi 0,4250, ou seja,  $\beta$  não é estatisticamente diferente de zero quando considerados dois desvios-padrões. Para  $\alpha$  o desvio-padrão obtido foi 0,0208.

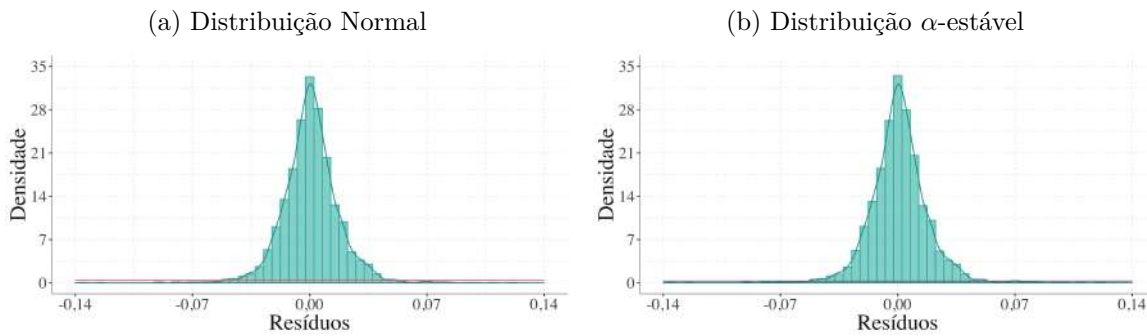
A seguir, serão apresentados alguns gráficos e uma tabela referentes à análise das suposições feitas em relação aos resíduos.

Tabela 3.16 – Medidas resumo das inovações dos modelos APARCH(1, 1)

Medidas	Distribuição	
	Normal	Estável
Média	0,0007	0,0008
Variância	0,0003	0,0003
Desvio padrão	0,0174	0,0174

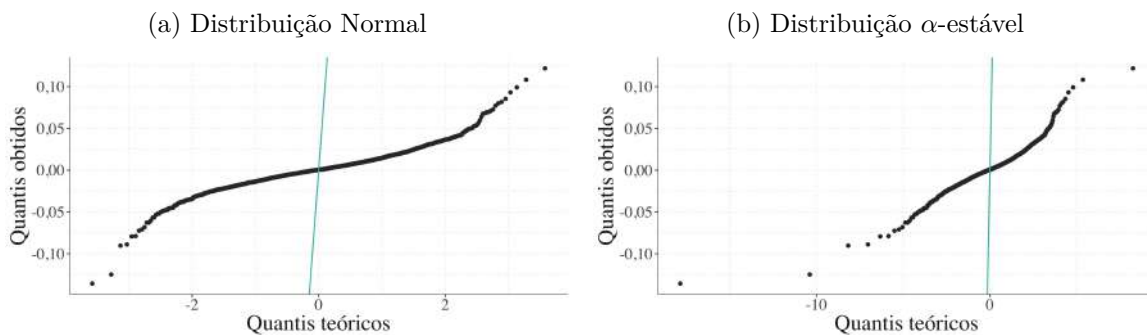
Assim como no modelo GARCH(1, 1) apresentado anteriormente, as inovações do modelo APARCH(1, 1) também apresentaram variância e desvio-padrão menor do que é suposto pelo modelo. O que pode ser melhor visualizado nos histogramas e nos gráficos de quantis apresentados abaixo.

Figura 3.27 – Histograma dos resíduos do modelo APARCH(1, 1)



Assim como nos histogramas apresentados anteriormente, na Figura 3.27 a linha verde representa a densidade dos dados, a linha rosa a densidade de uma distribuição Normal com média zero e variância um e a roxa representa a densidade de uma distribuição estável com  $\sigma = 1$ ,  $\mu = 0$  e os valores estimados  $\alpha = 1,9429$  e  $\beta = -0,6519$ .

Figura 3.28 – Gráfico de quantis dos resíduos do modelo APARCH(1, 1)



Nos gráficos apresentados é fácil visualizar a informação relatada anteriormente, que a variância dos resíduos é muito menor do que a suposta pelo modelo, tanto para a distribuição Normal quanto para a distribuição Estável.

Buscando avaliar a hipótese de independência dos resíduos, construiu-se os gráficos apresentados a seguir.

Figura 3.29 – Resíduos do modelo APARCH(1, 1)

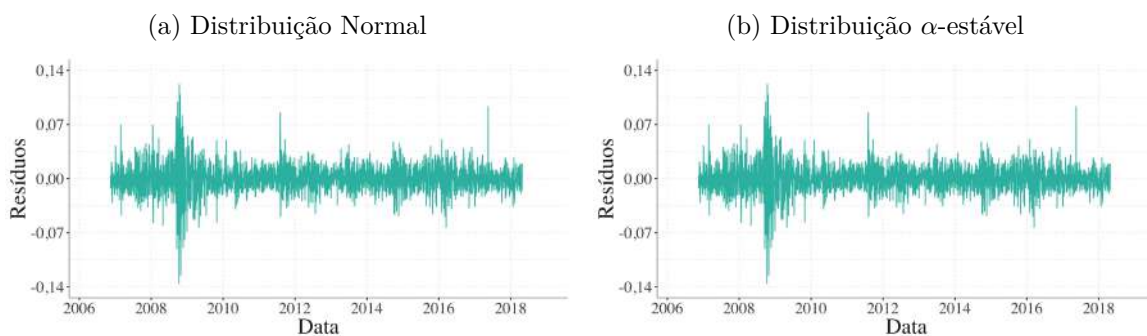
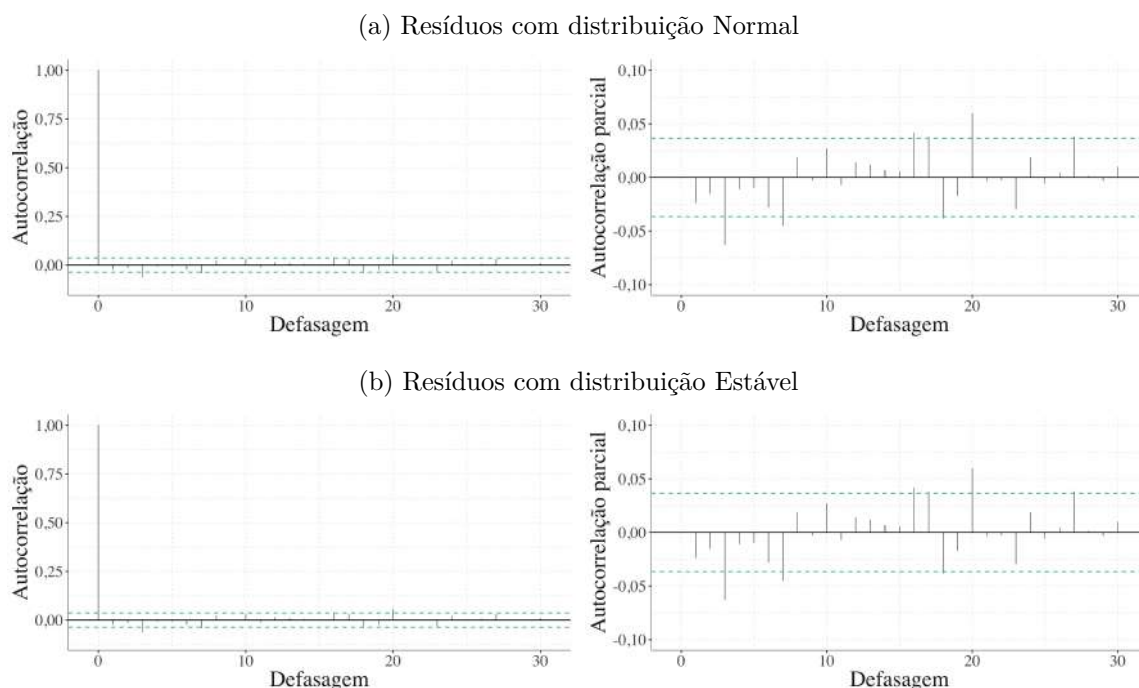




Figura 3.30 – Autocorrelação para os resíduos do modelo APARCH(1, 1)



Assim como no modelo GARCH(1,1), observando os gráficos apresentados na Figuras 3.30 é possível perceber que a estrutura de correlação existente nos dados foi mantida nos resíduos. Como em todas as defasagens os valores tanto da autocorrelação quanto da autocorrelação parcial encontram-se dentro ou próximos dos limites, pode-se dizer que as inovações satisfazem a hipótese de independência.

Buscando comparar os modelos GARCH e APARCH apresentados, construiu-se a tabela apresentada a seguir.

Tabela 3.17 – Comparação entre os modelos ajustados

Medidas	GARCH(1, 1)		APARCH(1, 1)	
	Normal	Estável	Normal	Estável
Log-verossimilhança	-7.940,98	-7.968,67	-7.974,52	-7.997,81
AIC	-15.873,95	-15.925,34	-15.937,04	-15.979,62
BIC	-15.850,10	-15.889,56	-15.901,26	-15.931,92
AICc	-15.871,93	-15.923,30	-15.935,00	-15.977,56

É possível perceber que os resultados obtidos foram muito semelhantes tanto quando se compara em um mesmo modelo as diferentes distribuições quanto ao comparar os modelos APARCH e GARCH. Além dessas medidas apresentadas, realizou-se testes de Kolmogorov-Smirnov para avaliar a adequabilidade às respectivas distribuições. Para os dois modelos com ambas as distribuições obteve-se estatísticas do teste entre 0,47 e 0,49 e todos rejeitaram a hipótese de que as inovações seguissem a distribuição suposta.



## 4 Conclusões

Durante esse trabalho, apresentou-se algumas propriedades da distribuição  $\alpha$ -estável com o objetivo de destacar a importância de tal distribuição para modelar dados leptocúrticos. Em particular, buscou-se ressaltar sua utilização na modelagem de séries temporais.

Visando alcançar esse objetivo, aplicou-se os modelos GARCH e APARCH, assim como suas extensões ARMA-GARCH e ARMA-APARCH, em dois bancos de dados distintos: o primeiro referente à velocidade do vento em Brasília e o segundo contendo informações sobre o Índice Bovespa. Para realizar essa aplicação utilizou-se o pacote *GEVStableGarch*<sup>1</sup> do *software R*<sup>2</sup>.

Como o que era esperado, para o banco de dados da velocidade do vento em Brasília observou-se que os modelos ajustados apresentavam melhores resultados quando supunha-se distribuição  $\alpha$ -estável para as inovações, justificando a utilização dessa distribuição. Entretanto, para os dados referentes ao Índice Bovespa ressalta-se que, como descrito no capítulo anterior, os resíduos dos modelos apresentados não se adequaram às distribuições impostas por apresentarem uma variância menor. Neste banco de dados, os resultados para todos os modelos foram muito próximos, mas os que utilizavam a distribuição Normal apresentaram resultados um pouco melhores.

Em relação ao pacote *GEVStableGarch*, constatou-se que, para alguns bancos de dados, o pacote retorna a estimativa dos desvios-padrão dos parâmetros dos modelos como informação faltante. Esse problema ocorreu por dois motivos distintos: o primeiro pois o algoritmo não atingiu a convergência e o segundo porque não foi possível inverter a matriz hessiana.

Para análises e pesquisas futuras, recomenda-se estudar de forma mais aprofundada o que gerou a não significância de alguns parâmetros dos modelos apresentados. Além disso, sugere-se uma expansão do pacote *GEVStableGarch* na qual seja possível estimar a variância dos erros, assim como os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  são estimados no caso da distribuição Estável, colocando 1 como limitante superior para a variância e não como valor fixo.

---

<sup>1</sup> Sousa, Otiniano e Lopes (2017)

<sup>2</sup> R Core Team (2017)



# Referências

- BAILLIE, R. T.; BOLLERSLEV, T. Prediction in dynamic models with time-dependent conditional variances. *Journal of Econometrics*, Elsevier, v. 52, n. 1-2, p. 91–113, 1992. Citado na página 38.
- BOLLERSLEV, T. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, Elsevier, v. 31, n. 3, p. 307–327, 1986. Citado nas páginas 19, 37 e 38.
- BUSSAB, W. d. O.; MORETTIN, P. A. *Estatística básica*. [S.l.]: Saraiva, 2010.
- DING, Z.; GRANGER, C. W. J.; ENGLE, R. F. A long memory property of stock market returns and a new model. *Journal of Empirical Finance*, v. 1, p. 83–106, 1993. Citado nas páginas 19 e 41.
- ENGLE, R. F. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, JSTOR, p. 987–1007, 1982. Citado nas páginas 19 e 37.
- EWING, B. T.; KRUSE, J. B.; SCHROEDER, J. L. Time series analysis of wind speed with time-varying turbulence. *Environmetrics*, Wiley Online Library, v. 17, n. 2, p. 119–127, 2006.
- FELLER, W. *An introduction to probability theory and its applications, volume II*. [S.l.]: Wiley, New York, 1971. v. 2. Citado nas páginas 22, 23 e 25.
- INSTITUTO NACIONAL DE METEOROLOGIA (INMET). 2018. Disponível em: <www.inmet.gov.br>. Acesso em: 18 de abril de 2018. Citado na página 43.
- LÉVY, P. Théorie des erreurs. la loi de gauss et les lois exceptionnelles. *Bull. Soc. Math. France*, v. 52, p. 49–52, 1924. Citado nas páginas 21, 22 e 25.
- MAGALHÃES, M. N. *Probabilidade e variáveis aleatórias*. [S.l.]: Edusp, 2006.
- MOHAMMADI, M. Prediction of  $\alpha$ -stable GARCH and ARMA-GARCH-M models. *Journal of Forecasting*, Wiley Online Library, v. 36, n. 7, p. 859–866, 2017. Citado nas páginas 38, 39 e 40.
- MORETTIN, P. A. *Econometria financeira: um curso em séries temporais financeiras*. [S.l.]: Edgar Blücher, 2008.
- MORETTIN, P. A.; TOLOI, C. *Análise de séries temporais*. [S.l.]: Blucher, 2006.
- R Core Team. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. Vienna, Austria, 2017. Disponível em: <<https://www.R-project.org/>>. Acesso em: 18 de abril de 2018. Citado nas páginas 26, 32, 43 e 65.
- SAMORODNITSKY, G.; TAQQU, M. S. *Stable non-Gaussian random processes: stochastic models with infinite variance*. [S.l.]: CRC press, 1994. v. 1. Citado na página 24.
- SAMPAIO, J. M. Probabilidade de ruína em tempo finito de processos de risco via aproximações por processos de Lévy  $\alpha$ -estáveis. 2006. Citado na página 29.

SAMPAIO, J. M. *Estimação indireta de modelos R-GARCH*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2012. Citado nas páginas 23 e 32.

SOUSA, A. T. do R.; OTINIANO, C. E. G.; LOPES, S. R. C. *GEVStableGarch*. [S.l.], 2017. Citado nas páginas 40, 43 e 65.

WICKHAM, H. *ggplot2: Elegant Graphics for Data Analysis*. Springer-Verlag New York, 2009. ISBN 978-0-387-98140-6. Disponível em: <<http://ggplot2.org>>. Acesso em: 18 de abril de 2018. Citado nas páginas 26, 32 e 43.

WUERTZ, D.; MAECHLER, M.; MEMBERS., R. core team. *stabledist: Stable Distribution Functions*. [S.l.], 2016. R package version 0.7-1. Disponível em: <<https://CRAN.R-project.org/package=stabledist>>. Acesso em: 18 de abril de 2018. Citado nas páginas 26, 32 e 43.

WUERTZ, D.; SETZ, T.; CHALABI, Y. *fBasics: Rmetrics - Markets and Basic Statistics*. [S.l.], 2017. R package version 3042.89. Disponível em: <<https://CRAN.R-project.org/package=fBasics>>. Acesso em: 18 de abril de 2018. Citado na página 43.

WUERTZ, D. et al. *fGarch: Rmetrics - Autoregressive Conditional Heteroskedastic Modeling*. [S.l.], 2017. R package version 3042.83. Disponível em: <<https://CRAN.R-project.org/package=fGarch>>. Acesso em: 18 de abril de 2018. Citado na página 43.

# ANEXO A – Códigos

## A.1 Gráficos apresentados no Capítulo 1

```

library(ggplot2)
library(stabledist)
library(scales)

5 #####
#####
##### Gráficos seção 1.1 #####
#####
#####

10 x <- seq(-4, 4, 0.1)
xx <- rep(x, 4)
ddd <- as.data.frame(xx)
ddd$a <- rep(c(.5, 1, 1.5, 2), each = length(x))
ddd$v.a <- c(dstable(x, 0.5, 0, 1, 0),
15         dstable(x, 1, 0, 1, 0),
         dstable(x, 1.5, 0, 1, 0),
         dstable(x, 2, 0, 1, 0))
ddd$b <- rep(c(-1, 0, 1, NA), each = length(x))
ddd$v.b <- c(dstable(x, 1, -1, 1, 0),
20         dstable(x, 1, 0, 1, 0),
         dstable(x, 1, 1, 1, 0),
         rep(NA, 81))
ddd$s <- rep(c(1, 1.5, 2, 3), each = length(x))
ddd$v.s <- c(dstable(x, 1, 0, 1, 0),
25         dstable(x, 1, 0, 1.5, 0),
         dstable(x, 1, 0, 2, 0),
         dstable(x, 1, 0, 3, 0))
ddd$m <- rep(c(-2, 0, 2, NA), each = length(x))
ddd$v.m <- c(dstable(x, 1, 0, 1, -2),
30         dstable(x, 1, 0, 1, 0),
         dstable(x, 1, 0, 1, 2),
         rep(NA, 81))

setwd("~/Desktop/TCC 2/imagens")

```

```

notacao <- format_format(big.mark = ".", decimal.mark = ",",
                          scientific = F)

ggplot(ddd, aes(xx, v.a, group = as.factor(a),
40         colour = as.factor(a))) +
  geom_line() +
  labs(x = "x", y = "Densidade") +
  theme(axis.line = element_line(colour = "gray40",
45         size = .3,
        linetype = "solid"),
        panel.background = element_blank(),
        panel.grid.major = element_line(size = 0.5,
        linetype = 'dotted',
        colour = "gray90"),
50        panel.grid.minor = element_line(size = 0.5,
        linetype = 'dotted',
        colour = "gray90"),
        text = element_text(size = 22, family="serif",
        color = "gray10"),
55        legend.title = element_text(size = 16,
        family="serif",
        color = "gray20"),
        legend.title.align = 0.5,
        legend.text.align = 0.5,
60        legend.text = element_text(size = 16,
        family="serif",
        color = "gray20"),
        legend.key = element_blank(),
        axis.text = element_text(size = 16,
65        family="serif",
        color = "gray30")) +
  scale_y_continuous(limits = c(0,.7),
        breaks = c(0,.2,.4,.6),
        label = notacao) +
70  scale_x_continuous(limits = c(-4,4),
        breaks = seq(-4,4,2),
        label = notacao) +
  scale_color_manual(name = substitute(alpha),
        values = c("#f76f7b", "#996b92",
75        "#189b90", "#e8a558"))

ggsave("variandoAlpha.jpg", device = "jpg",

```



```

width = 200, height = 100, units = "mm")

80 aux <- ddd[!is.na(ddd$b) ,]

ggplot(aux, aes(xx, v.b, group = as.factor(b),
               colour = as.factor(b))) +
  geom_line() +
85 labs(x = "x", y = "Densidade") +
  theme(axis.line = element_line(colour = "gray40",
                                size = .3,
                                linetype = "solid"),
        panel.background = element_blank(),
90 panel.grid.major = element_line(size = 0.5,
                                linetype = 'dotted',
                                colour = "gray90"),
        panel.grid.minor = element_line(size = 0.5,
                                linetype = 'dotted',
                                colour = "gray90"),
95 text = element_text(size = 22, family="serif",
                       color = "gray10"),
        legend.title = element_text(size = 16,
                                    family="serif",
100 color = "gray20"),
        legend.title.align = 0.5,
        legend.text.align = 0.5,
        legend.text = element_text(size = 16,
                                   family="serif",
105 color = "gray20"),
        legend.key = element_blank(),
        axis.text = element_text(size = 16,
                                   family="serif",
                                   color = "gray30")) +
110 scale_y_continuous(limits = c(0,.7),
                     breaks = c(0,.2,.4,.6),
                     label = notacao) +
  scale_x_continuous(limits = c(-4,4),
                     breaks = seq(-4,4,2),
115 label = notacao) +
  scale_color_manual(name = substitute(beta),
                    values = c("#f76f7b", "#996b92",
                              "#189b90", "#e8a558"))

```

```

120 ggsave("variandoBeta.jpg", device = "jpg", width = 200,
        height = 100, units = "mm")

ggplot(ddd, aes(xx, v.s, group = as.factor(s),
125         colour = as.factor(s))) +
  geom_line() +
  labs(x = "x", y = "Densidade") +
  theme(axis.line = element_line(colour = "gray40",
130         size = .3,
        linetype = "solid"),
        panel.background = element_blank(),
        panel.grid.major = element_line(size = 0.5,
        linetype = 'dotted',
        colour = "gray90"),
135        panel.grid.minor = element_line(size = 0.5,
        linetype = 'dotted',
        colour = "gray90"),
        text = element_text(size = 22, family="serif",
        color = "gray10"),
140        legend.title = element_text(size = 16,
        family="serif",
        color = "gray20"),
        legend.title.align = 0.5,
        legend.text.align = 0.5,
145        legend.text = element_text(size = 16,
        family="serif",
        color = "gray20"),
        legend.key = element_blank(),
        axis.text = element_text(size = 16,
150        family="serif",
        color = "gray30")) +
  scale_y_continuous(limits = c(0,.7),
        breaks = c(0,.2,.4,.6),
        label = notacao) +
155  scale_x_continuous(limits = c(-4,4),
        breaks = seq(-4,4,2),
        label = notacao) +
  scale_color_manual(name = substitute(sigma),
        values = c("#f76f7b", "#996b92",
160        "#189b90", "#e8a558"))

```

```

ggsave("variandoSigma.jpg", device = "jpg", width = 200,
       height = 100, units = "mm")

165
ggplot(aux, aes(xx, v.m, group = as.factor(m),
               colour = as.factor(m))) +
  geom_line() +
  labs(x = "x", y = "Densidade") +
170  theme(axis.line = element_line(colour = "gray40",
                                   size = .3,
                                   linetype = "solid"),
        panel.background = element_blank(),
        panel.grid.major = element_line(size = 0.5,
175                                         linetype = 'dotted',
                                         colour = "gray90"),
        panel.grid.minor = element_line(size = 0.5,
                                         linetype = 'dotted',
                                         colour = "gray90"),
180        text = element_text(size = 22,
                               family="serif",
                               color = "gray10"),
        legend.title = element_text(size = 16,
                                     family="serif",
185                                     color = "gray20"),
        legend.title.align = 0.5,
        legend.text.align = 0.5,
        legend.text = element_text(size = 16,
                                     family="serif",
190                                     color = "gray20"),
        legend.key = element_blank(),
        axis.text = element_text(size = 16,
                                   family="serif",
                                   color = "gray30")) +
195  scale_y_continuous(limits = c(0,.7),
                     breaks = c(0,.2,.4,.6),
                     label = notacao) +
  scale_x_continuous(limits = c(-4,4),
                     breaks = seq(-4,4,2),
200                     label = notacao) +
  scale_color_manual(name = substitute(mu),
                    values = c("#f76f7b", "#996b92",
                              "#189b90", "#e8a558"))

```

```

205 ggsave("variandoMu.jpg", device = "jpg", width = 200,
        height = 100, units = "mm")

#####
210 #####
##### Gráficos seção 1.2 #####
#####
#####

x <- seq(-4, 4, 0.1)
215 xx <- rep(x, 4)
ddd <- as.data.frame(xx)
ddd$a <- rep(c(.5, 1, 1.5, 2), each = length(x))
ddd$v.a <- c(pstable(x, 0.5, 0, 1, 0),
            pstable(x, 1, 0, 1, 0),
220            pstable(x, 1.5, 0, 1, 0),
            pstable(x, 2, 0, 1, 0))
ddd$b <- rep(c(-1, 0, 1, NA), each = length(x))
ddd$v.b <- c(pstable(x, 1, -1, 1, 0),
            pstable(x, 1, 0, 1, 0),
225            pstable(x, 1, 1, 1, 0),
            rep(NA, 81))
ddd$s <- rep(c(1, 1.5, 2, 3), each = length(x))
ddd$v.s <- c(pstable(x, 1, 0, 1, 0),
            pstable(x, 1, 0, 1.5, 0),
230            pstable(x, 1, 0, 2, 0),
            pstable(x, 1, 0, 3, 0))
ddd$m <- rep(c(-2, 0, 2, NA), each = length(x))
ddd$v.m <- c(pstable(x, 1, 0, 1, -2),
            pstable(x, 1, 0, 1, 0),
235            pstable(x, 1, 0, 1, 2),
            rep(NA, 81))

ggplot(ddd, aes(xx, v.a, group = as.factor(a),
240             colour = as.factor(a))) +
  geom_line() +
  labs(x = "x", y = "Probabilidade acumulada") +
  theme(axis.line = element_line(colour = "gray40",
245             size = .3,
             linetype = "solid"),

```

```

    panel.background = element_blank(),
    panel.grid.major = element_line(size = 0.5,
                                     linetype = 'dotted',
                                     colour = "gray90"),
250   panel.grid.minor = element_line(size = 0.5,
                                     linetype = 'dotted',
                                     colour = "gray90"),
    text = element_text(size = 22, family="serif",
                        color = "gray10"),
255   legend.title = element_text(size = 16,
                                family="serif",
                                color = "gray20"),

    legend.title.align = 0.5,
    legend.text.align = 0.5,
260   legend.text = element_text(size = 16,
                                family="serif",
                                color = "gray20"),

    legend.key = element_blank(),
    axis.text = element_text(size = 16,
                             family="serif",
265                             color = "gray30")) +

    scale_y_continuous(limits = c(0,1),
                      breaks = c(0,.2,.4,.6,.8,1),
                      label = notacao) +
270   scale_x_continuous(limits = c(-4,4),
                      breaks = seq(-4,4,2),
                      label = notacao) +

    scale_color_manual(name = substitute(alpha),
                      values = c("#f76f7b", "#996b92",
275                             "#189b90", "#e8a558"))

ggsave("avariandoAlpha.jpg", device = "jpg", width = 200,
       height = 100, units = "mm")

280 aux <- ddd[!is.na(ddd$b),]

ggplot(aux, aes(xx, v.b, group = as.factor(b),
               colour = as.factor(b))) +
  geom_line() +
285   labs(x = "x", y = "Probabilidade acumulada") +
  theme(axis.line = element_line(colour = "gray40",
                                size = .3,
```

```

                                linetype = "solid"),
panel.background = element_blank(),
290 panel.grid.major = element_line(size = 0.5,
                                linetype = 'dotted',
                                colour = "gray90"),
panel.grid.minor = element_line(size = 0.5,
                                linetype = 'dotted',
295 colour = "gray90"),
text = element_text(size = 22, family="serif",
                    color = "gray10"),
legend.title = element_text(size = 16,
                            family="serif",
300 color = "gray20"),
legend.title.align = 0.5,
legend.text.align = 0.5,
legend.text = element_text(size = 16,
                            family="serif",
305 color = "gray20"),
legend.key = element_blank(),
axis.text = element_text(size = 16,
                        family="serif",
                        color = "gray30")) +
310 scale_y_continuous(limits = c(0,1),
                    breaks = c(0,.2,.4,.6,.8,1),
                    label = notacao) +
scale_x_continuous(limits = c(-4,4),
                    breaks = seq(-4,4,2),
315 label = notacao) +
scale_color_manual(name = substitute(beta),
                    values = c("#f76f7b", "#996b92",
                                "#189b90", "#e8a558"))

320 ggsave("avariandoBeta.jpg", device = "jpg", width = 200,
        height = 100, units = "mm")

ggplot(ddd, aes(xx, v.s, group = as.factor(s),
325 colour = as.factor(s))) +
  geom_line() +
  labs(x = "x", y = "Probabilidade acumulada") +
  theme(axis.line = element_line(colour = "gray40",
                                size = .3,
```

```

330         linetype = "solid"),
    panel.background = element_blank(),
    panel.grid.major = element_line(size = 0.5,
                                     linetype = 'dotted',
                                     colour = "gray90"),
335    panel.grid.minor = element_line(size = 0.5,
                                     linetype = 'dotted',
                                     colour = "gray90"),
    text = element_text(size = 22, family="serif",
                        color = "gray10"),
340    legend.title = element_text(size = 16,
                                family="serif",
                                color = "gray20"),

    legend.title.align = 0.5,
    legend.text.align = 0.5,
345    legend.text = element_text(size = 16,
                                family="serif",
                                color = "gray20"),

    legend.key = element_blank(),
    axis.text = element_text(size = 16,
                             family="serif",
                             color = "gray30")) +
    scale_y_continuous(limits = c(0,1),
                      breaks = c(0,.2,.4,.6,.8,1),
                      label = notacao) +
355    scale_x_continuous(limits = c(-4,4),
                      breaks = seq(-4,4,2),
                      label = notacao) +
    scale_color_manual(name = substitute(sigma),
                      values = c("#f76f7b", "#996b92",
                                "#189b90", "#e8a558"))

360

ggsave("avariandoSigma.jpg", device = "jpg", width = 200,
      height = 100, units = "mm")

365

ggplot(aux, aes(xx, v.m, group = as.factor(m),
               colour = as.factor(m))) +
    geom_line() +
    labs(x = "x", y = "Probabilidade acumulada") +
370    theme(axis.line = element_line(colour = "gray40",
                                    size = .3,
```

```

                                linetype = "solid"),
panel.background = element_blank(),
panel.grid.major = element_line(size = 0.5,
375                                linetype = 'dotted',
                                colour = "gray90"),
panel.grid.minor = element_line(size = 0.5,
                                linetype = 'dotted',
                                colour = "gray90"),
380 text = element_text(size = 22, family="serif",
                        color = "gray10"),
legend.title = element_text(size = 16,
                             family="serif",
                             color = "gray20"),
385 legend.title.align = 0.5,
legend.text.align = 0.5,
legend.text = element_text(size = 16,
                             family="serif",
                             color = "gray20"),
390 legend.key = element_blank(),
axis.text = element_text(size = 16,
                          family="serif",
                          color = "gray30")) +
scale_y_continuous(limits = c(0,1),
395                     breaks = c(0,.2,.4,.6,.8,1),
                     label = notacao) +
scale_x_continuous(limits = c(-4,4),
                    breaks = seq(-4,4,2),
                    label = notacao)+
400 scale_color_manual(name = substitute(mu),
                     values = c("#f76f7b", "#996b92",
                                "#189b90", "#e8a558"))

ggsave("avariandoMu.jpg", device = "jpg", width = 200,
405     height = 100, units = "mm")

```

## A.2 Códigos da aplicação em dados de ventos

```

library(ggplot2)
library(fBasics)
library(stabledist)
library(GEVStableGarch)
5 library(scales)

```



```

setwd("/Users/anavitorinha/Desktop/TCC 2/imagens/VentoNovo")

dadosinmet <- read.csv("/Users/anavitorinha/Desktop/TCC
  2/imagens/VentoNovo/dadosinmet.txt", na.strings="///")

10 dadosinmet$data2 <- as.POSIXct(paste(dadosinmet$data,
  dadosinmet$hora, sep = " "), format = "%d/%m/%Y %H")
vvv <- data.frame(data = dadosinmet$data2, veloc =
  dadosinmet$vento_direcao)

vvv <- vvv[-c(7235, 7237, 7241),] # Remover os depois de 31/03
15 vvv <- removeNA(vvv)

logret <- log(vvv$veloc[-1]/vvv$veloc[-nrow(vvv)])

vento <- data.frame(logret, data = vvv$data[-1])

20 n.vento = c(mean(vento$logret), sd(vento$logret))
e.vento = stableFit(vento$logret, doplot = F)$fit$estimate

25 #####
##### MODELOS #####
#####

30 mod1 <- gsFit(~garch(1,1), data = vento$logret, cond.dist = "norm")
# mod2 <- gsFit(~garch(1,1), data = vento$logret, cond.dist =
  "stableS1")

mod3 <- gsFit(~arma(0,1) + garch(1,1), data = vento$logret,
  cond.dist = "norm")
# mod4 <- gsFit(~arma(0,1) + garch(1,1), data = vento$logret,
  cond.dist = "stableS1")

35 mod5 <- gsFit(~aparch(1,1), data = vento$logret, cond.dist = "norm")
# mod6 <- gsFit(~aparch(1,1), data = vento$logret, cond.dist =
  "stableS1")

mod7 <- gsFit(~arma(0,1) + aparch(1,1), data = vento$logret,
  cond.dist = "norm")

```

```

40 # mod8 <- gsFit(~arma(0,1) + aparch(1,1), data = vento$logret,
    cond.dist = "stableS1")

45

#####
##### FUNCOES #####
#####

50 notacao <- format_format(big.mark = ".", decimal.mark = ",",
    scientific = F)

qacf <- function(x, confianca = 0.95, parcial = F, dist = "Normal"){
  ciline <- ifelse(dist == "Normal",
55         qnorm((1 - confianca)/2)/sqrt(length(x)),
         qt((1 - qstable)/2,3)/sqrt(length(x)))
  if(parcial == F){
    bacf <- acf(x, plot = FALSE, lag.max = 30)
    bacfdf <- with(bacf, data.frame(lag, acf))
60 nome <- "Autocorrelação"
  } else {
    bacf <- pacf(x, plot = FALSE, lag.max = 30)
    bacfdf <- with(bacf, data.frame(lag, acf))
    nome <- "Autocorrelação parcial"
65 }
  g.lim <- c(min(-.1, min(bacf$acf)), max(.1, max(bacf$acf)))
  grafico <- ggplot(data = bacfdf, aes(x = lag, y = acf)) +
    geom_bar(stat = "identity", position = "stack", width = 0.05) +
    ylab(nome) + xlab("Defasagem") +
70 geom_hline(yintercept = -ciline, color = "#34bcb1",
              size = 0.5, lty = 2) +
    geom_hline(yintercept = ciline, color = "#34bcb1",
              size = 0.5, lty = 2) +
    geom_hline(yintercept = 0, size = 0.5) +
75 theme(axis.line = element_line(colour = "gray40", size = .3,
                                  linetype = "solid"),
        panel.background = element_blank(),
        panel.grid.major = element_line(size = 0.5, linetype =
'dotted',

```

```

                                colour = "gray90"),
80   panel.grid.minor = element_line(size = 0.5, linetype =
    'dotted',
                                colour = "gray90"),
    text = element_text(size = 22, family="serif", color =
"gray10"),
    legend.title = element_text(size = 16, family="serif",
color = "gray20"),
    legend.title.align = 0.5,
85   legend.text.align = 0.5,
    legend.text = element_text(size = 16, family="serif",
color = "gray20"),
    legend.key = element_blank(),
    axis.text = element_text(size = 16, family="serif", color
= "gray30")) +
    scale_x_continuous(limits = c(-.5,30.5), breaks = seq(0,30,10),
label = notacao) +
90   scale_y_continuous(limits = g.lim, label = notacao)
    return(grafico)
}

qqplot<- function(dados, dist = "qnorm", vec.par){
95   slope <- 1
    int <- 0
    d <- data.frame(resids = dados)
    ggplot(d, aes(sample = resids)) + stat_qq(colour = "gray20",
                                distribution = dist,
    dparams = vec.par) +
100   geom_abline(slope = slope, intercept = int, col = "#34bcb1",
size = .6) +
    xlab("Quantis teóricos") + ylab("Quantis obtidos") +
    theme(axis.line = element_line(colour = "gray40", size = .3,
                                linetype = "solid"),
    panel.background = element_blank(),
105   panel.grid.major = element_line(size = 0.5, linetype =
    'dotted',
                                colour = "gray90"),
    panel.grid.minor = element_line(size = 0.5, linetype =
    'dotted',
                                colour = "gray90"),
    text = element_text(size = 22, family="serif", color =
"gray10"),

```

```

110     legend.title = element_text(size = 16, family="serif",
color = "gray20"),
    legend.title.align = 0.5,
    legend.text.align = 0.5,
    legend.text = element_text(size = 16, family="serif",
color = "gray20"),
    legend.key = element_blank(),
115     axis.text = element_text(size = 16, family="serif", color
= "gray30")) +
    scale_x_continuous(label = notacao) +
    scale_y_continuous(label = notacao)
}

120

125

130

135

#####
##### TESTES #####
#####

140 set.seed(12345)
aux <- rnorm(10000, mean = mean(vento$logret), sd = sd(vento$logret))
ks.test(vento$logret, aux)
set.seed(12345)
aux <- rstable(10000, e.vento[1], e.vento[2], e.vento[3], e.vento[4])
145 ks.test(vento$logret, aux)

```

150

```

155 #####
##### GRAFICOS #####
#####

##### DADOS SEM LOGRETORNO #####
160 ggplot(vvv, aes(data, veloc)) +
  geom_line(colour = "#34bcb1") +
  labs(x = "Data", y = "Velocidade do vento (m/s)") +
  theme(axis.line = element_line(colour = "gray40", size = .3,
                                linetype = "solid"),
165       panel.background = element_blank(),
       panel.grid.major = element_line(size = 0.5, linetype =
'dotted',
                                colour = "gray90"),
       panel.grid.minor.y = element_line(size = 0.5, linetype =
'dotted',
                                colour = "gray90"),
170       text = element_text(size = 22, family="serif", color =
"gray10"),
       legend.title = element_text(size = 16, family="serif",
color = "gray20"),
       legend.title.align = 0.5,
       legend.text.align = 0.5,
       legend.text = element_text(size = 16, family="serif", color
= "gray20"),
175       legend.key = element_blank(),
       axis.text = element_text(size = 16, family="serif", color =
"gray30")) +
scale_y_continuous(limits = c(0, 9.1), breaks = seq(0, 9.1, 3),
  label = notacao) +
scale_x_datetime(breaks = seq(as.POSIXct("2017-06-01"),
  as.POSIXct("2018-04-01"),
                                by = "2 months"),
180       date_labels = "%m/%Y", expand = c(.1, 0),
       limits = c(as.POSIXct("2017-06-01"),
as.POSIXct("2018-04-01")))

```

```

ggsave("vvvlinhas.jpg", device = "jpg", width = 200, height = 100,
      units = "mm")

185 ggplot(vvv, aes(veloc)) +
      geom_histogram(aes(y = ..density..), fill = "#34bcb1", colour =
        "#34bcb1",
                    binwidth = .4, alpha = 0.6) +
      labs(x = "Velocidade do vento (m/s)", y = "Densidade") +
      geom_density(aes(y = ..density..), colour = "#189b90") +
190 theme(axis.line = element_line(colour = "gray40", size = .3,
                                  linetype = "solid"),
        panel.background = element_blank(),
        panel.grid.major = element_line(size = 0.5, linetype =
          'dotted',
                                  colour = "gray90"),
195        panel.grid.minor.y = element_line(size = 0.5, linetype =
          'dotted',
                                  colour = "gray90"),
        text = element_text(size = 22, family="serif", color =
          "gray10"),
        legend.title = element_text(size = 16, family="serif",
          color = "gray20"),
        legend.title.align = 0.5,
200        legend.text.align = 0.5,
        legend.text = element_text(size = 16, family="serif", color =
          "gray20"),
        legend.key = element_blank(),
        axis.text = element_text(size = 16, family="serif", color =
          "gray30")) +
      scale_x_continuous(limits = c(-0.4, 9.6), breaks = seq(0, 9.1, 3),
        label = notacao) +
205      scale_y_continuous(limits = c(0, .31), breaks = seq(0, .31, .1),
        label = notacao)

ggsave("vvvhistograma.jpg", device = "jpg", width = 200, height =
      100, units = "mm")

210 qacf(vvv$veloc, parcial = F)
ggsave("vvvAC.jpg", device = "jpg", width = 200, height = 100, units
      = "mm")

```

```

qacf(vvv$veloc, parcial = T)
ggsave("vvvACP.jpg", device = "jpg", width = 200, height = 100,
       units = "mm")
215

220

225 ##### DADOS COM LOGRETORNO #####
##### LINHAS #####
ggplot(vento, aes(data, logret)) +
  geom_line(colour = "#34bcb1") +
  labs(x = "Data", y = "Velocidade do vento (m/s)") +
230 theme(axis.line = element_line(colour = "gray40", size = .3,
                                   linetype = "solid"),
         panel.background = element_blank(),
         panel.grid.major = element_line(size = 0.5, linetype =
'        dotted',
                                   colour = "gray90"),
235         panel.grid.minor.y = element_line(size = 0.5, linetype =
'        dotted',
                                   colour = "gray90"),
         text = element_text(size = 22, family="serif", color =
"gray10"),
         legend.title = element_text(size = 16, family="serif",
color = "gray20"),
         legend.title.align = 0.5,
240         legend.text.align = 0.5,
         legend.text = element_text(size = 16, family="serif", color
= "gray20"),
         legend.key = element_blank(),
         axis.text = element_text(size = 16, family="serif", color =
"gray30")) +
scale_y_continuous(limits = c(-3.5, 3.5), breaks = seq(-3.5, 3.5,
1.75), label = notacao) +
245 scale_x_datetime(breaks = seq(as.POSIXct("2017-06-01"),

```

```

as.POSIXct("2018-04-01"),
                                by = "2 months"),
date_labels = "%m/%Y", expand = c(.1, 0),
limits = c(as.POSIXct("2017-06-01"),
as.POSIXct("2018-04-01")))

250 ggsave("vlinhas.jpg", device = "jpg", width = 200, height = 100,
        units = "mm")

##### HISTOGRAMA #####

255 ggplot(vento, aes(logret)) +
  geom_histogram(aes(y = ..density..), fill = "#34bcb1", colour =
    "#34bcb1",
                binwidth = .2, alpha = 0.6) +
  labs(x = "Velocidade do vento (m/s)", y = "Densidade") +
  geom_density(aes(y = ..density..), colour = "#189b90") +
260 stat_function(fun = dnorm, color = "#f76f7b",
                args = list(mean = n.vento[1], sd = n.vento[2]),
                size = .5) +
  stat_function(fun = dstable, color = "#996b92",
                args = list(alpha = e.vento[1], beta = e.vento[2],
265 gamma = e.vento[3], delta = e.vento[4]),
                size = .5) +
  theme(axis.line = element_line(colour = "gray40", size = .3,
                                linetype = "solid"),
        panel.background = element_blank(),
270 panel.grid.major = element_line(size = 0.5, linetype =
    'dotted',
                                colour = "gray90"),
        panel.grid.minor.y = element_line(size = 0.5, linetype =
    'dotted',
                                colour = "gray90"),
        text = element_text(size = 22, family="serif", color =
    "gray10"),
275 legend.title = element_text(size = 16, family="serif",
    color = "gray20"),
        legend.title.align = 0.5,
        legend.text.align = 0.5,
        legend.text = element_text(size = 16, family="serif", color
    = "gray20"),

```



```
        legend.key = element_blank() ,
280     axis.text = element_text(size = 16, family="serif", color =
        "gray30")) +
    scale_x_continuous(limits = c(-3.5, 3.5), breaks = seq(-3.5, 3.5,
        1.75), label = notacao) +
    scale_y_continuous(limits = c(0, 1), breaks = seq(0, 1, .25),
        label = notacao)

ggsave("vhistograma.jpg", device = "jpg", width = 200, height = 100,
    units = "mm")
285

##### AUTOCORRELACAO #####

qacf(vento$logret , parcial = F)
290 ggsave("vAC.jpg", device = "jpg", width = 200, height = 100, units =
    "mm")

qacf(vento$logret , parcial = T)
ggsave("vACP.jpg", device = "jpg", width = 200, height = 100, units
    = "mm")

295

##### QQ-PLOT #####
qplot(vento$logret , vec.par = n.vento)
ggsave("vqqplotN.jpg", device = "jpg", width = 200, height = 100,
    units = "mm")

300 qplot(vento$logret , dist = "qstable", vec.par = e.vento)
ggsave("vqqplotE.jpg", device = "jpg", width = 200, height = 100,
    units = "mm")
```

305

310

```

315
320
325
330

#####
335 ##### GARCH(1,1) #####
#####
qacf(mod1@residuals, parcial = F)
ggsave("g11NAC.jpg", device = "jpg", width = 200, height = 100,
      units = "mm")

340 qacf(mod1@residuals, parcial = T)
ggsave("g11NACP.jpg", device = "jpg", width = 200, height = 100,
      units = "mm")

qacf(mod2@residuals, parcial = F)
345 ggsave("g11EAC.jpg", device = "jpg", width = 200, height = 100,
      units = "mm")

qacf(mod2@residuals, parcial = T)
ggsave("g11EACP.jpg", device = "jpg", width = 200, height = 100,
      units = "mm")

```

350

355

360

365

370

```
#####  
##### ARMA(0,1)-GARCH(1,1) #####  
#####  
375 res3 <- data.frame(residuos = mod3@residuals, data = vento$data)  
    res4 <- data.frame(residuos = mod4@residuals, data = vento$data)  
  
    qacf(res3$residuos, parcial = F)  
    ggsave("a01g11NAC.jpg", device = "jpg", width = 200, height = 100,  
           units = "mm")  
380  
    qacf(res3$residuos, parcial = T)  
    ggsave("a01g11NACP.jpg", device = "jpg", width = 200, height = 100,  
           units = "mm")  
  
    qacf(res4$residuos, parcial = F)  
385 ggsave("a01g11EAC.jpg", device = "jpg", width = 200, height = 100,  
           units = "mm")  
  
    qacf(res4$residuos, parcial = T)  
    ggsave("a01g11EACP.jpg", device = "jpg", width = 200, height = 100,  
           units = "mm")
```

```

390 ##### LINHAS #####
ggplot(res3, aes(data, residuos)) +
  geom_line(colour = "#34bcb1") +
  labs(x = "Data", y = "Resíduos") +
  theme(axis.line = element_line(colour = "gray40", size = .3,
395         linetype = "solid"),
        panel.background = element_blank(),
        panel.grid.major = element_line(size = 0.5, linetype =
        'dotted',
                                         colour = "gray90"),
        panel.grid.minor.y = element_line(size = 0.5, linetype =
        'dotted',
                                         colour = "gray90"),
400         text = element_text(size = 22, family="serif", color =
        "gray10"),
        legend.title = element_text(size = 16, family="serif",
        color = "gray20"),
        legend.title.align = 0.5,
        legend.text.align = 0.5,
405         legend.text = element_text(size = 16, family="serif", color
        = "gray20"),
        legend.key = element_blank(),
        axis.text = element_text(size = 16, family="serif", color =
        "gray30")) +
scale_y_continuous(limits = c(-2.7, 1.8), breaks = seq(-2.7, 1.8,
        .9), label = notacao) +
scale_x_datetime(breaks = seq(as.POSIXct("2017-06-01"),
        as.POSIXct("2018-04-01"),
410         by = "2 months"),
        date_labels = "%m/%Y", expand = c(.1, 0),
        limits = c(as.POSIXct("2017-06-01"),
        as.POSIXct("2018-04-01")))

ggsave("a01g11Nlinhas.jpg", device = "jpg", width = 200, height =
        100, units = "mm")
415

ggplot(res4, aes(data, residuos)) +
  geom_line(colour = "#34bcb1") +
  labs(x = "Data", y = "Resíduos") +
420  theme(axis.line = element_line(colour = "gray40", size = .3,

```

```

                                linetype = "solid"),
    panel.background = element_blank(),
    panel.grid.major = element_line(size = 0.5, linetype =
'dotted',
                                colour = "gray90"),
425     panel.grid.minor.y = element_line(size = 0.5, linetype =
'dotted',
                                colour = "gray90"),
    text = element_text(size = 22, family="serif", color =
"gray10"),
    legend.title = element_text(size = 16, family="serif",
color = "gray20"),
    legend.title.align = 0.5,
430     legend.text.align = 0.5,
    legend.text = element_text(size = 16, family="serif", color
= "gray20"),
    legend.key = element_blank(),
    axis.text = element_text(size = 16, family="serif", color =
"gray30")) +
scale_y_continuous(limits = c(-2.7, 1.8), breaks = seq(-2.7, 1.8,
.9), label = notacao) +
435 scale_x_datetime(breaks = seq(as.POSIXct("2017-06-01"),
as.POSIXct("2018-04-01"),
                                by = "2 months"),
                    date_labels = "%m/%Y", expand = c(.1, 0),
                    limits = c(as.POSIXct("2017-06-01"),
as.POSIXct("2018-04-01")))

440 ggsave("a01g11Elinhas.jpg", device = "jpg", width = 200, height =
100, units = "mm")

##### HISTOGRAMA #####

445 ggplot(res3, aes(residuos)) +
    geom_histogram(aes(y = ..density..), fill = "#34bcb1", colour =
"#34bcb1",
                    binwidth = .1, alpha = 0.6) +
    labs(x = "Resíduos", y = "Densidade") +
    geom_density(aes(y = ..density..), colour = "#189b90") +
450 stat_function(fun = dnorm, color = "#f76f7b",
                    args = list(mean = 0, sd = 1),

```

```

        size = .5) +
theme(axis.line = element_line(colour = "gray40", size = .3,
                                linetype = "solid"),
455   panel.background = element_blank(),
     panel.grid.major = element_line(size = 0.5, linetype =
'dotted',
                                colour = "gray90"),
     panel.grid.minor = element_line(size = 0.5, linetype =
'dotted',
                                colour = "gray90"),
460   text = element_text(size = 22, family="serif", color =
"gray10"),
     legend.title = element_text(size = 16, family="serif",
color = "gray20"),
     legend.title.align = 0.5,
     legend.text.align = 0.5,
     legend.text = element_text(size = 16, family="serif", color
= "gray20"),
465   legend.key = element_blank(),
     axis.text = element_text(size = 16, family="serif", color =
"gray30")) +
scale_x_continuous(limits = c(-3, 2), breaks = seq(-3, 2, 1),
  label = notacao) +
scale_y_continuous(limits = c(0, 1.02), breaks = seq(0, 1, .25),
  label = notacao)

470 ggsave("a01g11Nhistograma.jpg", device = "jpg", width = 200, height
    = 100, units = "mm")

ggplot(res4, aes(residuos)) +
  geom_histogram(aes(y = ..density..), fill = "#34bcb1", colour =
"#34bcb1",
475   binwidth = .12, alpha = 0.6) +
  labs(x = "Resíduos", y = "Densidade") +
  geom_density(aes(y = ..density..), colour = "#189b90") +
  stat_function(fun = dstable, color = "#996b92",
    args = list(alpha = mod4@fit$par[[7]], beta =
mod4@fit$par[[6]],
480   gamma = 1, delta = 0),
    size = .5) +
theme(axis.line = element_line(colour = "gray40", size = .3,

```

```

                                linetype = "solid"),
    panel.background = element_blank(),
485     panel.grid.major = element_line(size = 0.5, linetype =
        'dotted',
                                colour = "gray90"),
    panel.grid.minor.y = element_line(size = 0.5, linetype =
        'dotted',
                                colour = "gray90"),
    text = element_text(size = 22, family="serif", color =
        "gray10"),
490     legend.title = element_text(size = 16, family="serif",
        color = "gray20"),
    legend.title.align = 0.5,
    legend.text.align = 0.5,
    legend.text = element_text(size = 16, family="serif", color
        = "gray20"),
    legend.key = element_blank(),
495     axis.text = element_text(size = 16, family="serif", color =
        "gray30")) +
    scale_x_continuous(limits = c(-3, 2), breaks = seq(-3, 2, 1),
        label = notacao) +
    scale_y_continuous(limits = c(0, 1.02), breaks = seq(0, 1, .25),
        label = notacao)

ggsave("a01g11Ehistograma.jpg", device = "jpg", width = 200, height
    = 100, units = "mm")
500

##### QQ-PLOT #####
qplot(res3$residuos, vec.par = c(0,1))
505 ggsave("a01g11Nqqplot.jpg", device = "jpg", width = 200, height =
    100, units = "mm")

qplot(res4$residuos, dist = "qstable", vec.par =
    c(mod4@fit$par[[7]], mod4@fit$par[[6]], 1, 0))
ggsave("a01g11Eqqplot.jpg", device = "jpg", width = 200, height =
    100, units = "mm")
510

##### TESTES #####

```

```

set.seed(12345)
aux <- rnorm(10000, mean = 0, sd = 1)
515 ks.test(res3$residuos, aux)
set.seed(12345)
aux <- rstable(10000, mod4@fit$par[[7]], mod4@fit$par[[6]], 1, 0)
ks.test(res4$residuos, aux)

520

525

530
#####
##### APARCH(1,1) #####
#####
res5 <- data.frame(residuos = mod5@residuals, data = vento$data)
535 res6 <- data.frame(residuos = mod6@residuals, data = vento$data)

qacf(res5$residuos, parcial = F)
ggsave("a11NAC.jpg", device = "jpg", width = 200, height = 100,
        units = "mm")
540
qacf(res5$residuos, parcial = T)
ggsave("a11NACP.jpg", device = "jpg", width = 200, height = 100,
        units = "mm")

qacf(res6$residuos, parcial = F)
545 ggsave("a11EAC.jpg", device = "jpg", width = 200, height = 100,
        units = "mm")

qacf(res6$residuos, parcial = T)
ggsave("a11EACP.jpg", device = "jpg", width = 200, height = 100,
        units = "mm")

550

```



555

560

565

```
570 #####  
##### ARMA(0,1)-APARCH(1,1) #####  
#####  
res7 <- data.frame(residuos = mod7@residuals, data = vento$data)  
res8 <- data.frame(residuos = mod8@residuals, data = vento$data)  
575  
qacf(res7$residuos, parcial = F)  
ggsave("a01a11NAC.jpg", device = "jpg", width = 200, height = 100,  
        units = "mm")  
  
qacf(res7$residuos, parcial = T)  
580 ggsave("a01a11NACP.jpg", device = "jpg", width = 200, height = 100,  
        units = "mm")  
  
qacf(res8$residuos, parcial = F)  
ggsave("a01a11EAC.jpg", device = "jpg", width = 200, height = 100,  
        units = "mm")  
  
585 qacf(res8$residuos, parcial = T)  
ggsave("a01a11EACP.jpg", device = "jpg", width = 200, height = 100,  
        units = "mm")
```

```
##### LINHAS #####
```

```

ggplot(res7, aes(data, residuos)) +
590 geom_line(colour = "#34bcb1") +
  labs(x = "Data", y = "Resíduos") +
  theme(axis.line = element_line(colour = "gray40", size = .3,
                                linetype = "solid"),
        panel.background = element_blank(),
595 panel.grid.major = element_line(size = 0.5, linetype =
  'dotted',
                                colour = "gray90"),
        panel.grid.minor.y = element_line(size = 0.5, linetype =
  'dotted',
                                colour = "gray90"),
        text = element_text(size = 22, family="serif", color =
  "gray10"),
600 legend.title = element_text(size = 16, family="serif",
  color = "gray20"),
        legend.title.align = 0.5,
        legend.text.align = 0.5,
        legend.text = element_text(size = 16, family="serif", color
  = "gray20"),
        legend.key = element_blank(),
605 axis.text = element_text(size = 16, family="serif", color =
  "gray30")) +
scale_y_continuous(limits = c(-2.7, 1.83), breaks = seq(-2.7, 1.8,
  .9), label = notacao) +
scale_x_datetime(breaks = seq(as.POSIXct("2017-06-01"),
  as.POSIXct("2018-04-02"),
                                by = "2 months"),
610 date_labels = "%m/%Y", expand = c(.1, 0),
  limits = c(as.POSIXct("2017-06-01"),
  as.POSIXct("2018-04-02")))

ggsave("a01a11Nlinhas.jpg", device = "jpg", width = 200, height =
  100, units = "mm")

615 ggplot(res8, aes(data, residuos)) +
  geom_line(colour = "#34bcb1") +
  labs(x = "Data", y = "Resíduos") +
  theme(axis.line = element_line(colour = "gray40", size = .3,
                                linetype = "solid"),
620 panel.background = element_blank(),

```

```

        panel.grid.major = element_line(size = 0.5, linetype =
'dotted',
                                         colour = "gray90"),
        panel.grid.minor.y = element_line(size = 0.5, linetype =
'dotted',
                                         colour = "gray90"),
625     text = element_text(size = 22, family="serif", color =
"gray10"),
        legend.title = element_text(size = 16, family="serif",
color = "gray20"),
        legend.title.align = 0.5,
        legend.text.align = 0.5,
        legend.text = element_text(size = 16, family="serif", color
= "gray20"),
630     legend.key = element_blank(),
        axis.text = element_text(size = 16, family="serif", color =
"gray30")) +
scale_y_continuous(limits = c(-2.7, 1.83), breaks = seq(-2.7, 1.8,
.9), label = notacao) +
scale_x_datetime(breaks = seq(as.POSIXct("2017-06-01"),
as.POSIXct("2018-04-02"),
                                by = "2 months"),
635     date_labels = "%m/%Y", expand = c(.1, 0),
        limits = c(as.POSIXct("2017-06-01"),
as.POSIXct("2018-04-02")))

ggsave("a01a11Elinhas.jpg", device = "jpg", width = 200, height =
100, units = "mm")

640 ##### HISTOGRAMA #####

ggplot(res7, aes(residuos)) +
geom_histogram(aes(y = ..density..), fill = "#34bcb1", colour =
"#34bcb1",
645     binwidth = .1, alpha = 0.6) +
labs(x = "Resíduos", y = "Densidade") +
geom_density(aes(y = ..density..), colour = "#189b90") +
stat_function(fun = dnorm, color = "#f76f7b",
              args = list(mean = 0, sd = 1),
650     size = .5) +
theme(axis.line = element_line(colour = "gray40", size = .3,

```

```

                                linetype = "solid"),
    panel.background = element_blank(),
    panel.grid.major = element_line(size = 0.5, linetype =
655 'dotted',
                                colour = "gray90"),
    panel.grid.minor = element_line(size = 0.5, linetype =
    'dotted',
                                colour = "gray90"),
    text = element_text(size = 22, family="serif", color =
    "gray10"),
    legend.title = element_text(size = 16, family="serif",
660 color = "gray20"),
    legend.title.align = 0.5,
    legend.text.align = 0.5,
    legend.text = element_text(size = 16, family="serif", color
    = "gray20"),
    legend.key = element_blank(),
    axis.text = element_text(size = 16, family="serif", color =
    "gray30")) +
665 scale_x_continuous(limits = c(-3, 2), breaks = seq(-3, 2, 1),
    label = notacao) +
    scale_y_continuous(limits = c(0, 1.02), breaks = seq(0, 1, .25),
    label = notacao)

ggsave("a01a11Nhistograma.jpg", device = "jpg", width = 200, height
    = 100, units = "mm")

670 ggplot(res8, aes(residuos)) +
    geom_histogram(aes(y = ..density..), fill = "#34bcb1", colour =
    "#34bcb1",
                                binwidth = .1, alpha = 0.6) +
    labs(x = "Resíduos", y = "Densidade") +
675 geom_density(aes(y = ..density..), colour = "#189b90") +
    stat_function(fun = dstable, color = "#996b92",
                                args = list(alpha = mod8@fit$par[[9]], beta =
    mod8@fit$par[[8]],
                                gamma = 1, delta = 0),
                                size = .5) +
680 theme(axis.line = element_line(colour = "gray40", size = .3,
                                linetype = "solid"),
    panel.background = element_blank(),

```

```

        panel.grid.major = element_line(size = 0.5, linetype =
'dotted',
                                         colour = "gray90"),
685     panel.grid.minor.y = element_line(size = 0.5, linetype =
'dotted',
                                         colour = "gray90"),
        text = element_text(size = 22, family="serif", color =
"gray10"),
        legend.title = element_text(size = 16, family="serif",
color = "gray20"),
        legend.title.align = 0.5,
690     legend.text.align = 0.5,
        legend.text = element_text(size = 16, family="serif", color
= "gray20"),
        legend.key = element_blank(),
        axis.text = element_text(size = 16, family="serif", color =
"gray30")) +
scale_x_continuous(limits = c(-3, 2), breaks = seq(-3, 2, 1),
label = notacao) +
695 scale_y_continuous(limits = c(0, 1.03), breaks = seq(0, 1, .25),
label = notacao)

ggsave("a01a11Ehistograma.jpg", device = "jpg", width = 200, height
= 100, units = "mm")

700 ##### QQ-PLOT #####
qplot(res7$residuos, vec.par = c(0,1))
ggsave("a01a11Nqqplot.jpg", device = "jpg", width = 200, height =
100, units = "mm")

705 qplot(res8$residuos, dist = "qstable", vec.par =
c(mod8@fit$par[[9]], mod8@fit$par[[8]], 1, 0))
ggsave("a01a11Eqqplot.jpg", device = "jpg", width = 200, height =
100, units = "mm")

710 ##### TESTES #####
set.seed(12345)

```

```

aux <- rnorm(10000, mean = 0, sd = 1)
ks.test(res7$residuos, aux)
715 set.seed(12345)
aux <- rstable(10000, mod8@fit$par[[9]], mod8@fit$par[[8]], 1, 0)
ks.test(res8$residuos, aux)

```

### A.3 Códigos da aplicação no índice Bovespa

```

library(ggplot2)
library(fBasics)
library(stabledist)
library(GEVStableGarch)
5 library(scales)

setwd("/Users/anavitorinha/Desktop/TCC 2/imagens/IBOV")

ibov <- read_excel("~/Desktop/TCC 2/imagens/IBOV/ibov.xlsx",
10 col_types = c("date", "text", "skip",
                "skip", "skip", "skip",
                "skip"))

ibov$cotacao <- gsub("\\\\.", "", ibov$cotacao)
15 ibov$cotacao <- gsub(",", "\\.", ibov$cotacao)
ibov$cotacao <- as.numeric(ibov$cotacao)

ibov$log <- log(ibov$cotacao)

20 LR1 <- data.frame(data=ibov$data[-1])
LR1$logret <- ibov$log[-1] - ibov$log[-nrow(ibov)]

LR <- LR1[which(LR1$data < "2018-05-01"),]

25 #####
##### MODELOS #####
#####
mod1 <- gsFit(~garch(1,1), data = LR$logret,
30 cond.dist = "norm")
mod2 <- gsFit(~garch(1,1), data = LR$logret,
cond.dist = "stableS1")

mod5 <- gsFit(~aparch(1,1), data = LR$logret,

```

```

35         cond.dist = "norm")
mod6 <- gsFit(~aparch(1,1), data = LR$logret,
              cond.dist = "stableS1")

40 #####
##### FUNCOES #####
#####
notacao <- format_format(big.mark = ".",
                          decimal.mark = ",",
45                          scientific = F)

qacf <- function(x, confianca = 0.95, parcial = F,
                 dist = "Normal"){
  ciline <- ifelse(dist == "Normal",
50                 qnorm((1 - confianca)/2)/sqrt(length(x)),
                 qt((1 - qstable)/2,3)/sqrt(length(x)))
  if(parcial == F){
    bacf <- acf(x, plot = FALSE, lag.max = 30)
    bacfdf <- with(bacf, data.frame(lag, acf))
55     nome <- "Autocorrelação"
  } else {
    bacf <- pacf(x, plot = FALSE, lag.max = 30)
    bacfdf <- with(bacf, data.frame(lag, acf))
    nome <- "Autocorrelação parcial"
60  }
  g.lim <- c(min(-.1, min(bacf$acf)),
             max(.1, max(bacf$acf)))
  grafico <- ggplot(data = bacfdf, aes(x = lag, y = acf)) +
    geom_bar(stat = "identity", position = "stack",
65           width = 0.05) +
    ylab(nome) + xlab("Defasagem") +
    geom_hline(yintercept = -ciline, color = "#34bcb1",
              size = 0.5, lty = 2) +
    geom_hline(yintercept = ciline, color = "#34bcb1",
70           size = 0.5, lty = 2) +
    geom_hline(yintercept = 0, size = 0.5) +
    theme(axis.line = element_line(colour = "gray40",
                                   size = .3,
                                   linetype = "solid"),
75         panel.background = element_blank(),
         panel.grid.major = element_line(size = 0.5,

```

```

                                linetype = 'dotted',
                                colour = "gray90"),
  panel.grid.minor = element_line(size = 0.5,
                                linetype = 'dotted',
                                colour = "gray90"),
80  text = element_text(size = 22, family="serif",
                        color = "gray10"),
  legend.title = element_text(size = 16,
85  family="serif",
                        color = "gray20"),

  legend.title.align = 0.5,
  legend.text.align = 0.5,
  legend.text = element_text(size = 16,
90  family="serif",
                        color = "gray20"),

  legend.key = element_blank(),
  axis.text = element_text(size = 16,
95  family="serif",
                        color = "gray30")) +

  scale_x_continuous(limits = c(-.5, 30.5),
                    breaks = seq(0, 30, 10),
                    label = notacao) +

  scale_y_continuous(limits = g.lim, label = notacao)
100 return(grafico)
}

qplot<- function(dados, dist = "qnorm", vec.par){
  slope <- 1
105  int <- 0
  d <- data.frame(resids = dados)
  ggplot(d, aes(sample = resids)) +
    stat_qq(colour = "gray20",
            distribution = dist, dparams = vec.par) +
110  geom_abline(slope = slope, intercept = int,
              col = "#34bcb1", size = .6) +
  xlab("Quantis teóricos") + ylab("Quantis obtidos") +
  theme(axis.line = element_line(colour = "gray40",
115  size = .3,
                                linetype = "solid"),

        panel.background = element_blank(),
        panel.grid.major = element_line(size = 0.5,
                                linetype = 'dotted',

```



```

120         colour = "gray90"),
        panel.grid.minor = element_line(size = 0.5, linetype =
        'dotted',
        colour = "gray90"),
        text = element_text(size = 22, family="serif",
        color = "gray10"),
        legend.title = element_text(size = 16,
125         family="serif",
        color = "gray20"),
        legend.title.align = 0.5,
        legend.text.align = 0.5,
        legend.text = element_text(size = 16,
130         family="serif",
        color = "gray20"),
        legend.key = element_blank(),
        axis.text = element_text(size = 16,
        family="serif",
135         color = "gray30")) +
        scale_x_continuous(label = notacao) +
        scale_y_continuous(label = notacao)
    }

140

#####
##### TESTES #####
#####

145 n.ibov = c(mean(LR$logret), sd(LR$logret))
    e.ibov = stableFit(LR$logret, doplot = F)@fit$estimate

    set.seed(12345)
    aux <- rnorm(10000, mean = mean(LR$logret),
150         sd = sd(LR$logret))
    ks.test(LR$logret, aux)
    set.seed(12345)
    aux <- rstable(10000,
        e.ibov[1], e.ibov[2], e.ibov[3], e.ibov[4])
155 ks.test(LR$logret, aux)

#####

```

```

160 ##### GRAFICOS #####
#####

##### DADOS SEM LOGRETORNO #####

n.sLR = c(mean(ibov$cotacao), sd(ibov$cotacao))
165 e.sLR = stableFit(ibov$cotacao, doplot = F)@fit$estimate

ggplot(ibov, aes(data, cotacao)) +
  geom_line(colour = "#34bcb1") +
  labs(x = "Data", y = "Índice Bovespa") +
170 theme(axis.line = element_line(colour = "gray40",
                                   size = .3,
                                   linetype = "solid"),
        panel.background = element_blank(),
        panel.grid.major = element_line(size = 0.5,
                                         linetype = 'dotted',
                                         colour = "gray90"),
        panel.grid.minor.y = element_line(size = 0.5,
                                         linetype = 'dotted',
                                         colour = "gray90"),
180 text = element_text(size = 22, family="serif",
                       color = "gray10"),
        legend.title = element_text(size = 16,
                                     family="serif",
                                     color = "gray20"),
185 legend.title.align = 0.5,
        legend.text.align = 0.5,
        legend.text = element_text(size = 16,
                                    family="serif",
                                    color = "gray20"),
190 legend.key = element_blank(),
        axis.text = element_text(size = 16, family="serif",
                                   color = "gray30")) +
  scale_y_continuous(limits = c(29000, 90000),
                    breaks = seq(30000, 90000, 10000),
195 label = notacao) +
  scale_x_datetime(breaks = seq(as.POSIXct("2006-01-01"),
                                     as.POSIXct("2018-06-05"),
                                     by = "2 years"),
                  date_labels = "%Y", expand = c(.1, 0),
200 limits = c(as.POSIXct("2006-11-16"),
              as.POSIXct("2018-06-06")))

```

```

ggsave("sLRlinhas.jpg", device = "jpg", width = 200,
      height = 100, units = "mm")
205
# Histograma
ggplot(ibov, aes(cotacao)) +
  geom_histogram(aes(y = ..density..), fill = "#34bcb1",
                colour = "#34bcb1",
210                binwidth = 2000, alpha = 0.6) +
  labs(x = "Índice Bovespa", y = "Densidade") +
  geom_density(aes(y = ..density..), colour = "#189b90") +
  stat_function(fun = dnorm, color = "#f76f7b",
                args = list(mean = n.sLR[1], sd = n.sLR[2]),
215                size = .5) +
  stat_function(fun = dstable, color = "#996b92",
                args = list(alpha = e.sLR[1],
                            beta = e.sLR[2],
                            gamma = e.sLR[3],
220                            delta = e.sLR[4]),
                size = .5) +
  theme(axis.line = element_line(colour = "gray40",
                                size = .3,
                                linetype = "solid"),
225        panel.background = element_blank(),
        panel.grid.major = element_line(size = 0.5,
                                         linetype = 'dotted',
                                         colour = "gray90"),
        panel.grid.minor.y = element_line(size = 0.5,
                                         linetype = 'dotted',
230                                         colour = "gray90"),
        text = element_text(size = 22, family="serif",
                             color = "gray10"),
        legend.title = element_text(size = 16,
235                                     family="serif",
                                     color = "gray20"),
        legend.title.align = 0.5,
        legend.text.align = 0.5,
        legend.text = element_text(size = 16,
240                                     family="serif",
                                     color = "gray20"),
        legend.key = element_blank(),
        axis.text = element_text(size = 16,

```

```

245         family="serif",
            color = "gray30")) +
scale_x_continuous(limits = c(29000, 90000),
                    breaks = seq(30000, 90000, 20000),
                    label = notacao) +
scale_y_continuous(limits = c(0, 0.00005),
250                    breaks = seq(0, 0.00005, 0.00001),
                    label = notacao)

ggsave("sLRhistograma.jpg", device = "jpg", width = 200,
        height = 100, units = "mm")

255 # Autocorrelação
qacf(ibov$cotacao, parcial = F)
ggsave("sLRAC.jpg", device = "jpg", width = 200,
        height = 100, units = "mm")

260 qacf(ibov$cotacao, parcial = T)
ggsave("sLRACP.jpg", device = "jpg", width = 200,
        height = 100, units = "mm")

265

##### DADOS COM LOGRETORNO #####
##### LINHAS #####
ggplot(LR, aes(data, logret)) +
270   geom_line(colour = "#34bcb1") +
   labs(x = "Data", y = "Log-retorno") +
   theme(axis.line = element_line(colour = "gray40",
                                   size = .3,
                                   linetype = "solid"),
275   panel.background = element_blank(),
   panel.grid.major = element_line(size = 0.5,
                                   linetype = 'dotted',
                                   colour = "gray90"),
   panel.grid.minor.y = element_line(size = 0.5,
280                                   linetype = 'dotted',
                                   colour = "gray90"),
   text = element_text(size = 22, family="serif",
                        color = "gray10"),
   legend.title = element_text(size = 16,
285                                family="serif",

```

```

                                color = "gray20"),
    legend.title.align = 0.5,
    legend.text.align = 0.5,
    legend.text = element_text(size = 16,
290                                family="serif",
                                color = "gray20"),
    legend.key = element_blank(),
    axis.text = element_text(size = 16,
                                family="serif",
295                                color = "gray30")) +
    scale_y_continuous(limits = c(-.14, .14),
                        breaks = seq(-0.14, 0.14, .07),
                        labels = notacao) +
    scale_x_datetime(breaks = seq(as.POSIXct("2006-01-01"),
300                                as.POSIXct("2018-06-05"),
                                by = "2 years"),
                    date_labels = "%Y", expand = c(.1, 0),
                    limits = c(as.POSIXct("2006-11-16"),
                                as.POSIXct("2018-06-06")))
305
ggsave("linhas.jpg", device = "jpg", width = 200,
       height = 100, units = "mm")

310 ##### HISTOGRAMA #####
ggplot(LR, aes(logret)) +
    geom_histogram(aes(y = ..density..), fill = "#34bcb1",
                   colour = "#34bcb1",
                   binwidth = .005, alpha = 0.6) +
315 labs(x = "Log-retorno", y = "Densidade") +
    geom_density(aes(y = ..density..), colour = "#189b90") +
    stat_function(fun = dnorm, color = "#f76f7b",
                  args = list(mean = n.ibov[1],
                              sd = n.ibov[2]),
320                                size = .5) +
    stat_function(fun = dstable, color = "#996b92",
                  args = list(alpha = e.ibov[1],
                              beta = e.ibov[2],
                              gamma = e.ibov[3],
325                                delta = e.ibov[4]),
                                size = .5) +
    theme(axis.line = element_line(colour = "gray40",

```

```

                                size = .3,
                                linetype = "solid"),
330  panel.background = element_blank(),
    panel.grid.major = element_line(size = 0.5,
                                    linetype = 'dotted',
                                    colour = "gray90"),
    panel.grid.minor.y = element_line(size = 0.5,
335                                     linetype = 'dotted',
                                     colour = "gray90"),
    text = element_text(size = 22, family="serif",
                        color = "gray10"),
    legend.title = element_text(size = 16,
340                                family="serif",
                                color = "gray20"),

    legend.title.align = 0.5,
    legend.text.align = 0.5,
    legend.text = element_text(size = 16,
345                                family="serif",
                                color = "gray20"),

    legend.key = element_blank(),
    axis.text = element_text(size = 16,
                                family="serif",
                                color = "gray30")) +
350  scale_x_continuous(limits = c(-.14, .14),
                      breaks = seq(-0.14, 0.14, .07),
                      labels = notacao) +
    scale_y_continuous(limits = c(0, 35),
355                      breaks = seq(0, 35, 10))

ggsave("histograma.jpg", device = "jpg", width = 200,
       height = 100, units = "mm")

360 ##### AUTOCORRELACAO #####
qacf(LR$logret, partial = F)
ggsave("AC.jpg", device = "jpg", width = 200,
       height = 100, units = "mm")

365 qacf(LR$logret, partial = T)
ggsave("ACP.jpg", device = "jpg", width = 200,
       height = 100, units = "mm")

```

```

370 ##### QQ-PLOT #####
    qqplot(LR$logret , vec.par = n.ibov)
    ggsave("qqplotN.jpg", device = "jpg", width = 200,
           height = 100, units = "mm")

375
    qqplot(LR$logret , dist = "qstable", vec.par = e.ibov)
    ggsave("qqplotE.jpg", device = "jpg", width = 200,
           height = 100, units = "mm")

380

#####
##### GARCH(1,1) #####
#####

385 res1 <- data.frame(residuos = mod1@residuals, data = LR$data)
    res2 <- data.frame(residuos = mod2@residuals, data = LR$data)

    qacf(res1$residuos , parcial = F)
    ggsave("g11NAC.jpg", device = "jpg", width = 200,
390           height = 100, units = "mm")

    qacf(res1$residuos , parcial = T)
    ggsave("g11NACP.jpg", device = "jpg", width = 200,
           height = 100, units = "mm")

395
    qacf(res2$residuos , parcial = F)
    ggsave("g11EAC.jpg", device = "jpg", width = 200,
           height = 100, units = "mm")

400 qacf(res2$residuos , parcial = T)
    ggsave("g11EACP.jpg", device = "jpg", width = 200,
           height = 100, units = "mm")

##### LINHAS #####

405 ggplot(res1 , aes(data , residuos)) +
    geom_line(colour = "#34bcb1") +
    labs(x = "Data", y = "Resíduos") +
    theme(axis.line = element_line(colour = "gray40",
                                     size = .3,
410                                     linetype = "solid"),
          panel.background = element_blank(),

```





```

panel.grid.minor.y = element_line(size = 0.5,
455                                     linetype = 'dotted',
                                     colour = "gray90"),
text = element_text(size = 22, family="serif",
                     color = "gray10"),
legend.title = element_text(size = 16,
460                             family="serif",
                             color = "gray20"),
legend.title.align = 0.5,
legend.text.align = 0.5,
legend.text = element_text(size = 16,
465                             family="serif",
                             color = "gray20"),
legend.key = element_blank(),
axis.text = element_text(size = 16, family="serif",
                          color = "gray30")) +
470 scale_y_continuous(limits = c(-.14, .14),
                      breaks = seq(-.14, .14, .07),
                      label = notacao) +
scale_x_datetime(breaks = seq(as.POSIXct("2006-01-01"),
475                               as.POSIXct("2018-06-05"),
                               by = "2 years"),
                 date_labels = "%Y", expand = c(.1, 0),
                 limits = c(as.POSIXct("2006-11-16"),
                             as.POSIXct("2018-06-06")))

480 ggsave("g11Elinhas.jpg", device = "jpg", width = 200,
        height = 100, units = "mm")

##### HISTOGRAMA #####
485 ggplot(res1, aes(residuos)) +
  geom_histogram(aes(y = ..density..), fill = "#34bcb1",
                colour = "#34bcb1",
                binwidth = .005, alpha = 0.6) +
  labs(x = "Resíduos", y = "Densidade") +
490 geom_density(aes(y = ..density..), colour = "#189b90") +
  stat_function(fun = dnorm, color = "#f76f7b",
                args = list(mean = 0, sd = 1),
                size = .5) +
  theme(axis.line = element_line(colour = "gray40",
495                                size = .3,

```

```

                                linetype = "solid"),
panel.background = element_blank(),
panel.grid.major = element_line(size = 0.5,
                                linetype = 'dotted',
500                                colour = "gray90"),
panel.grid.minor = element_line(size = 0.5,
                                linetype = 'dotted',
                                colour = "gray90"),
text = element_text(size = 22, family="serif",
505                        color = "gray10"),
legend.title = element_text(size = 16,
                             family="serif",
                             color = "gray20"),

legend.title.align = 0.5,
510 legend.text.align = 0.5,
legend.text = element_text(size = 16,
                             family="serif",
                             color = "gray20"),

legend.key = element_blank(),
515 axis.text = element_text(size = 16, family="serif",
                             color = "gray30")) +
scale_x_continuous(limits = c(-.14, .14),
                   breaks = seq(-.14, .14, .07),
                   label = notacao) +
520 scale_y_continuous(limits = c(0, 35),
                   breaks = seq(0, 35, 7),
                   label = notacao)

ggsave("g11Nhistograma.jpg", device = "jpg", width = 200,
525       height = 100, units = "mm")

ggplot(res2, aes(residuos)) +
  geom_histogram(aes(y = ..density..), fill = "#34bcb1",
                 colour = "#34bcb1",
330                 binwidth = .005, alpha = 0.6) +
  labs(x = "Resíduos", y = "Densidade") +
  geom_density(aes(y = ..density..), colour = "#189b90") +
  stat_function(fun = dstable, color = "#996b92",
335                 args = list(alpha = mod2@fit$par[[6]],
                             beta = mod2@fit$par[[5]],
                             gamma = 1, delta = 0),
                 size = .5) +

```

```

theme(axis.line = element_line(colour = "gray40",
                                size = .3,
540                                linetype = "solid"),
      panel.background = element_blank(),
      panel.grid.major = element_line(size = 0.5,
                                       linetype = 'dotted',
                                       colour = "gray90"),
545      panel.grid.minor.y = element_line(size = 0.5,
                                       linetype = 'dotted',
                                       colour = "gray90"),
      text = element_text(size = 22, family="serif",
                           color = "gray10"),
550      legend.title = element_text(size = 16,
                                    family="serif",
                                    color = "gray20"),
      legend.title.align = 0.5,
      legend.text.align = 0.5,
555      legend.text = element_text(size = 16,
                                    family="serif",
                                    color = "gray20"),
      legend.key = element_blank(),
      axis.text = element_text(size = 16,
                                family = "serif",
                                color = "gray30")) +
scale_x_continuous(limits = c(-.14, .14),
                   breaks = seq(-.14, .14, .07),
                   label = notacao) +
565 scale_y_continuous(limits = c(0, 35),
                   breaks = seq(0, 35, 7),
                   label = notacao)

ggsave("g11Ehistograma.jpg", device = "jpg",
570       width = 200, height = 100, units = "mm")

##### QQ-PLOT #####
qplot(res1$residuos, vec.par = c(0,1))
575 ggsave("g11Nqqplot.jpg", device = "jpg", width = 200,
        height = 100, units = "mm")

qplot(res2$residuos, dist = "qstable",
      vec.par = c(mod2@fit$par[[6]], mod2@fit$par[[5]]),

```

```

580             1, 0))
ggsave("g11Eqqplot.jpg", device = "jpg", width = 200,
       height = 100, units = "mm")

##### TESTES #####
585 set.seed(12345)
aux <- rnorm(10000, mean = 0, sd = 1)
ks.test(res1$resíduos, aux)
set.seed(12345)
aux <- rstable(10000, mod2@fit$par[[6]], mod2@fit$par[[5]],
590             1, 0)
ks.test(res2$resíduos, aux)

595 #####
##### APARCH(1,1) #####
#####
res5 <- data.frame(resíduos = mod5$residuals,
                  data = LR$data)
600 res6 <- data.frame(resíduos = mod6$residuals,
                  data = LR$data)

qacf(res5$resíduos, partial = F)
ggsave("a11NAC.jpg", device = "jpg", width = 200,
605       height = 100, units = "mm")

qacf(res5$resíduos, partial = T)
ggsave("a11NACP.jpg", device = "jpg", width = 200,
610       height = 100, units = "mm")

qacf(res6$resíduos, partial = F)
ggsave("a11EAC.jpg", device = "jpg", width = 200,
615       height = 100, units = "mm")

qacf(res6$resíduos, partial = T)
ggsave("a11EACP.jpg", device = "jpg", width = 200,
620       height = 100, units = "mm")

##### LINHAS #####
ggplot(res5, aes(data, resíduos)) +

```

```

geom_line(colour = "#34bcb1") +
labs(x = "Data", y = "Resíduos") +
theme(axis.line = element_line(colour = "gray40",
625                                size = .3,
                                linetype = "solid"),
      panel.background = element_blank(),
      panel.grid.major = element_line(size = 0.5,
630                                linetype = 'dotted',
                                colour = "gray90"),
      panel.grid.minor.y = element_line(size = 0.5,
                                linetype = 'dotted',
                                colour = "gray90"),
      text = element_text(size = 22, family="serif",
635                                color = "gray10"),
      legend.title = element_text(size = 16,
                                family="serif",
                                color = "gray20"),

      legend.title.align = 0.5,
640      legend.text.align = 0.5,
      legend.text = element_text(size = 16,
                                family="serif",
                                color = "gray20"),

      legend.key = element_blank(),
645      axis.text = element_text(size = 16,
                                family="serif",
                                color = "gray30")) +
scale_y_continuous(limits = c(-.14, .14),
                   breaks = seq(-.14, .14, .07),
650                   label = notacao) +
scale_x_datetime(breaks = seq(as.POSIXct("2006-01-01"),
                                as.POSIXct("2018-06-05"),
                                by = "2 years"),
655                   date_labels = "%Y", expand = c(.1, 0),
                   limits = c(as.POSIXct("2006-11-16"),
                                as.POSIXct("2018-06-06")))

ggsave("allNlinhas.jpg", device = "jpg", width = 200,
660       height = 100, units = "mm")

ggplot(res6, aes(data, residuos)) +
geom_line(colour = "#34bcb1") +
labs(x = "Data", y = "Resíduos") +

```

```

theme(axis.line = element_line(colour = "gray40",
665         size = .3,
        linetype = "solid"),
panel.background = element_blank(),
panel.grid.major = element_line(size = 0.5,
670         linetype = 'dotted',
        colour = "gray90"),
panel.grid.minor.y = element_line(size = 0.5,
        linetype = 'dotted',
        colour = "gray90"),
text = element_text(size = 22, family="serif",
675         color = "gray10"),
legend.title = element_text(size = 16,
        family="serif",
        color = "gray20"),

legend.title.align = 0.5,
680 legend.text.align = 0.5,
legend.text = element_text(size = 16,
        family="serif",
        color = "gray20"),

legend.key = element_blank(),
685 axis.text = element_text(size = 16,
        family="serif",
        color = "gray30")) +
scale_y_continuous(limits = c(-.14, .14),
        breaks = seq(-.14, .14, .07),
690 label = notacao) +
scale_x_datetime(breaks = seq(as.POSIXct("2006-01-01"),
        as.POSIXct("2018-06-05"),
        by = "2 years"),
        date_labels = "%Y", expand = c(.1, 0),
695 limits = c(as.POSIXct("2006-11-16"),
        as.POSIXct("2018-06-06")))

ggsave("allElinhas.jpg", device = "jpg", width = 200,
700 height = 100, units = "mm")

##### HISTOGRAMA #####
ggplot(res5, aes(residuos)) +
  geom_histogram(aes(y = ..density..), fill = "#34bcb1",
705 colour = "#34bcb1",

```

```

        binwidth = .005, alpha = 0.6) +
labs(x = "Resíduos", y = "Densidade") +
geom_density(aes(y = ..density..), colour = "#189b90") +
stat_function(fun = dnorm, color = "#f76f7b",
710       args = list(mean = 0, sd = 1),
        size = .5) +
theme(axis.line = element_line(colour = "gray40",
                                size = .3,
                                linetype = "solid"),
715   panel.background = element_blank(),
   panel.grid.major = element_line(size = 0.5,
                                   linetype = 'dotted',
                                   colour = "gray90"),
   panel.grid.minor = element_line(size = 0.5,
720                                   linetype = 'dotted',
                                   colour = "gray90"),
   text = element_text(size = 22, family="serif",
                        color = "gray10"),
   legend.title = element_text(size = 16,
725                               family="serif",
                               color = "gray20"),
   legend.title.align = 0.5,
   legend.text.align = 0.5,
   legend.text = element_text(size = 16,
730                               family="serif",
                               color = "gray20"),
   legend.key = element_blank(),
   axis.text = element_text(size = 16, family="serif",
                             color = "gray30")) +
735   scale_x_continuous(limits = c(-.14, .14),
                       breaks = seq(-.14, .14, .07),
                       label = notacao) +
   scale_y_continuous(limits = c(0, 35),
                       breaks = seq(0, 35, 7),
740                       label = notacao)

ggsave("allNhistograma.jpg", device = "jpg", width = 200,
        height = 100, units = "mm")

745 ggplot(res6, aes(residuos)) +
   geom_histogram(aes(y = ..density..), fill = "#34bcb1",
                  colour = "#34bcb1",

```

```

    binwidth = .005, alpha = 0.6) +
  labs(x = "Resíduos", y = "Densidade") +
750 geom_density(aes(y = ..density..), colour = "#189b90") +
  stat_function(fun = dstable, color = "#996b92",
    args = list(alpha = mod6@fit$par[[8]],
      beta = mod6@fit$par[[7]],
      gamma = 1, delta = 0),
755 size = .5) +
  theme(axis.line = element_line(colour = "gray40",
    size = .3,
    linetype = "solid"),
    panel.background = element_blank(),
760 panel.grid.major = element_line(size = 0.5,
    linetype = 'dotted',
    colour = "gray90"),
    panel.grid.minor.y = element_line(size = 0.5,
    linetype = 'dotted',
765 colour = "gray90"),
    text = element_text(size = 22, family="serif",
    color = "gray10"),
    legend.title = element_text(size = 16,
    family="serif",
770 color = "gray20"),
    legend.title.align = 0.5,
    legend.text.align = 0.5,
    legend.text = element_text(size = 16,
    family="serif",
775 color = "gray20"),
    legend.key = element_blank(),
    axis.text = element_text(size = 16,
    family="serif",
    color = "gray30")) +
780 scale_x_continuous(limits = c(-.14, .14),
    breaks = seq(-.14, .14, .07),
    label = notacao) +
  scale_y_continuous(limits = c(0, 35),
    breaks = seq(0, 35, 7),
785 label = notacao)

ggsave("allEhistograma.jpg", device = "jpg", width = 200,
  height = 100, units = "mm")

```



```
790 ##### QQ-PLOT #####
      qqplot(res5$resíduos , vec.par = c(0,1))
      ggsave("a11Nqqplot.jpg", device = "jpg", width = 200,
              height = 100, units = "mm")

795
      qqplot(res6$resíduos , dist = "qstable",
              vec.par = c(mod6@fit$par[[8]], mod6@fit$par[[7]],
                          1, 0))
      ggsave("a11Eqqplot.jpg", device = "jpg", width = 200,
800         height = 100, units = "mm")

##### TESTES #####
      set.seed(12345)
      aux <- rnorm(10000, mean = 0, sd = 1)
805 ks.test(res5$resíduos , aux)
      set.seed(12345)
      aux <- rstable(10000, mod6@fit$par[[8]], mod6@fit$par[[7]],
                    1, 0)
      ks.test(res6$resíduos , aux)
```